

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Instituto de Matemática, Estatística

e Computação Científica

Departamento de Matemática

# Introdução à Teoria dos Pontos Críticos e Aplicações

Adriano Adrega de Moura

Dissertação de Mestrado orientada pelo prof. Dr. Francesco Mercuri

# Introdução à Teoria dos Pontos Críticos e Aplicações

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Adriano Adrega de Moura e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 25 de fevereiro de 2000

  
Prof. Dr. Francesco Mercuri  
Orientador

Banca Examinadora

Prof. Dr. Francesco Mercuri  
Prof. Dra. Ketty Abaroa de Rezende  
Prof. Dr. Renato Hyuda de Luna Pedrosa

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em MATEMÁTICA.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Moura, Adriano Adrega de

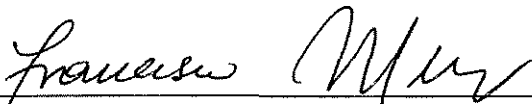
Ad82i      Introdução à teoria dos pontos críticos e aplicações / Adriano  
Adrega de Moura -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2000.

Orientador : Francesco Mercuri

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Morse, Teoria de. 2. Finsler, Espaços de. 3. Teoria do ponto  
crítico (Análise matemática). I. Mercuri, Francesco. II. Universidade  
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 25 de fevereiro de 2000 e aprovada  
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



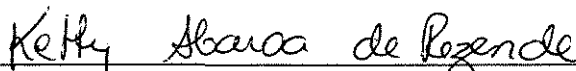
---

Prof (a). Dr(a). FRANCESCO MERCURI



---

Prof (a). Dr (a). RENATO HYUDA DE LUNA PEDROSA



---

Prof (a). Dr (a). KETTY ABAROA DE REZENDE

## Resumo

O trabalho tem por linha básica estudar a teoria dos pontos críticos em dimensão infinita e mostrar algumas de suas aplicações. O principal resultado é o desenvolvimento de uma teoria de Morse considerando pontos críticos degenerados e com hipóteses de baixa diferenciabilidade, o que nos permite recuperar o Teorema de Gromoll e Meyer para geodésicas fechadas no caso de métrica de Finsler.

## Abstract

The goal of this dissertation is to study infinite dimensional critical point theory showing some of its possible applications. The main result is the development of a Morse theory with low differentiability hypothesis considering degenerate critical points, what allows us to state the Gromoll and Meyer theorem for closed geodesics in the case of Finsler metric.

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que tornaram possível a realização deste trabalho.

Ao professor Dr. Francesco Mercuri pelo assunto proposto, pela orientação e sugestões dadas durante os dois anos da realização deste trabalho.

Ao professor Dr. Alcibiades Rigas por todo o apoio e paciência dispensada sempre com muita simpatia.

Aos professores Dr. Renato H. de L. Pedrosa, Dr. Marco Antonio Teixeira, Dr. Orlando Francisco Lopes e Marcelo da S. Montenegro pela atenção com que me atenderam quando foram procurados. À professora Dra. Ketty A. de Rezende pelas sugestões que fizeram esta versão final melhor.

Ao meu pai por todo apoio e infra-estrutura fornecida e à minha mãe que além do apoio sempre presente ainda teve paciência para revisar este texto à procura de erros ortográficos e gramaticais.

A todos os professores e colegas do IMECC que contribuíram direta ou indiretamente.

À FAPESP por todo apoio financeiro.

## Organização do Texto

O texto se destina a um primeiro estudo em teoria dos pontos críticos, especialmente a Teoria de Morse e a Teoria de Lusternik-Schnirelman.

No primeiro capítulo fazemos uma breve introdução histórica do desenvolvimento da teoria dos pontos críticos comentando alguns problemas que motivaram este desenvolvimento.

Nos dois capítulos subsequentes são feitas as generalizações e correções para o caso de dimensão infinita de conceitos e resultados conhecidos para dimensão finita. No segundo capítulo tratamos da extensão dos conceitos e resultados básicos do Cálculo para espaços de Banach em geral. No terceiro vemos o que acontece com o conceito de Variedade Diferenciável em dimensão infinita. Neste sentido, um ponto fundamental é o teorema de Sard-Smale. Ainda no terceiro capítulo apresentamos os primeiros resultados estudados em teoria dos pontos críticos. O principal resultado desta seção é o Lema de Morse que será fundamental no capítulo seguinte.

Nos dois próximos capítulos passamos ao estudo da teoria dos pontos críticos propriamente dito. O quarto capítulo é reservado ao estudo da teoria de Morse em espaços de Hilbert. Também neste capítulo fazemos uma introdução ao cálculo das variações usando-o como um exemplo de aplicação possível para a Teoria de Morse. O capítulo 5 é dedicado à teoria de Lusternik-Schnirelman em variedades de Finsler.

No último capítulo apresentamos avanços para alguns resultados como uma versão do Lema de Morse para pontos críticos degenerados e uma pequena extensão do trabalho do professor Mercuri em sua tese de doutoramento ([6]).

Adriano Adrega de Moura  
fevereiro/2000

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Cálculo em Espaços de Banach</b>	<b>3</b>
2.1	Diferenciabilidade . . . . .	3
2.2	Integração . . . . .	6
2.3	Teorema da Função Inversa . . . . .	8
2.4	Equações Diferenciais Ordinárias . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Variedades Diferenciáveis</b>	<b>11</b>
3.1	Variedades e Fibrados . . . . .	11
3.2	Campos de Vetores Tangentes . . . . .	13
3.3	Geometria Riemanniana . . . . .	14
3.4	Pontos Críticos : Primeiros Resultados . . . . .	16
3.5	Transversalidade Forte . . . . .	20
3.6	Partições da Unidade . . . . .	22
3.7	Operadores de Fredholm e o Teorema de Sard-Smale . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Teoria de Morse</b>	<b>30</b>
4.1	Alças . . . . .	30
4.2	Resultados Básicos da Teoria de Morse . . . . .	32
4.3	Introdução ao Cálculo das Variações . . . . .	35
4.4	Desigualdades de Morse . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Teoria de Lusternik-Schnirelman</b>	<b>47</b>
5.1	Variedades de Finsler . . . . .	47
5.2	Pontos Críticos e o Teorema do Minimax . . . . .	50
5.3	Categoria de Lusternick-Schnirelman . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Alguns Pequenos Avanços</b>	<b>61</b>
6.1	A Energia de Finsler e Problemas Variacionais Super Regulares . . . . .	61
6.2	Lema de Morse para Pontos Críticos Degenerados . . . . .	71
6.3	Considerações Finais : O Teorema de Gromoll e Meyer . . . . .	75



# 1 Introdução

Teoria dos pontos críticos é um conjunto de resultados relacionando a topologia de variedades à estrutura dos pontos críticos de funções reais nelas definidas. Neste sentido o teorema típico em teoria dos pontos críticos é o seguinte :

**Teorema Modelo .** Sejam  $M$  uma variedade e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo um certo conjunto de hipóteses. Então existe um invariante topológico de  $M$ , digamos  $t(M) = t \in \mathbb{N}$ , tal que o número de pontos críticos de  $f$  é pelo menos  $t$ .

Um exemplo trivial de tal teorema é o seguinte :

**Teorema .** Se  $M$  for compacta e  $f$  for diferenciável,  $f$  tem pelo menos 2 pontos críticos.

Os resultados mais clássicos neste sentido são conhecidos como Teoria de Morse. A Teoria de Morse foi originalmente desenvolvida para variedades de dimensão finita (veja [14]) e posteriormente estendida para variedades de Hilbert por Palais e Smale ([1, 4]). A outra teoria de pontos críticos que iremos tratar é a Teoria de Lusternick-Schnirelman seguindo de perto os artigos [2, 3]. Embora não tão fina quanto a Teoria de Morse, que é capaz de identificar o índice dos pontos críticos, a Teoria de Lusternick-Schnirelman se aplica a variedades de Banach sob hipóteses de diferenciabilidade mais fracas que as que são usadas na Teoria de Morse. No que se refere a diferenciabilidade, vale a pena ressaltar que as hipóteses clássicas para se desenvolver a Teoria de Morse (tanto em [14] quanto em [1]) eram de funções pelo menos  $C^2$  com pontos críticos todos não degenerados. Com o artigo [9], Mercuri e Palmieri conseguiram através de um lema de Morse com hipóteses mais fracas de diferenciabilidade (funções  $C^1$  duas vezes diferenciáveis em seus pontos críticos não degenerados), possibilitaram a recuperação de toda Teoria de Morse sob tais hipóteses.

O Teorema Modelo da teoria de pontos críticos vem sendo aplicado para resolver vários problemas. Ao final do capítulo 5 usaremos a Teoria de Lusternick-Schnirelman para provarmos o seguinte resultado :

**Teorema .** Seja  $M$  uma variedade riemanniana  $n$ -dimensional compacta e conexa. Dados dois pontos  $x, y \in M$ , existem infinitas geodésicas ligando  $x$  a  $y$ .

A maneira de se usar teoria de pontos críticos para demonstrar tal resultado é a seguinte. Consideramos o conjunto  $\Lambda(M; x, y)$  de todos os caminhos (suficientemente regulares definidos em um intervalo fixo) que ligam  $x$  a  $y$ . Se  $M$  for uma variedade riemanniana, podemos munir  $\Lambda(M; x, y)$  com uma estrutura de variedade riemanniana também. Um resultado básico da geometria riemanniana (usando cálculo das variações) diz que as geodésicas de  $M$  são os pontos críticos da energia de  $\Lambda(M; x, y)$  que é a função  $\tilde{L} : \Lambda(M; x, y) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tilde{L}(\alpha) = \frac{1}{2} \int \|\alpha'\|^2$$

Um problema similar é o de encontrar geodésicas fechadas, i.e., ao invés de considerarmos os caminhos ligando  $x$  a  $y$ , olharemos para o conjunto  $\Lambda(M)$  dos caminhos periódicos ( $\alpha(0) = \alpha(1)$ ). Como veremos no capítulo 6, este problema é bem mais complicado de se resolver que o anterior, mas, em 1969, Gromoll e Meyer estabeleceram o seguinte resultado ([13]) :

**Teorema .** Seja  $M^n$  uma variedade de Finsler compacta e simplesmente conexa. Se a cohomologia de  $M$  não for uma álgebra polinomial truncada em uma variável, então existem infinitas geodésicas periódicas (não triviais e geometricamente distintas).

A demonstração do teorema de Gromoll e Meyer usa a Teoria de Morse, porém os pontos críticos (na realidade são subvariedades críticas de  $\Lambda(M)$ ) que surgem podem ser degenerados, o que provocou a necessidade de um lema de Morse (e correspondente Teoria de Morse) que não tivesse a não degenerescência dos pontos críticos como hipótese. Esta versão do lema de Morse (para funções  $C^2$ ) foi demonstrada por Gromoll e Meyer em [12] e usada em [13].

Observe que as variedades (simplesmente conexas) que não satisfazem as hipóteses do teorema de Gromoll e Meyer ( $S^n, \mathbb{C}P^n, \mathbb{H}P^n$  e  $CaP^2$ ) também possuem infinitas geodésicas fechadas (não triviais e geometricamente distintas), porém, ainda não se tem uma demonstração do teorema sem considerar estes casos separadamente.

Em 1973 Katock [15, 16] construiu um exemplo de métrica de Finsler em  $S^2$  que admitia apenas um número finito de geodésicas fechadas. Posteriormente Ziller ([17]) construiu exemplos do mesmo tipo para os espaços projetivos. Estes fatos trouxeram a tona a pergunta “O teorema de Gromoll e Meyer vale para o caso de métrica de Finsler?”. A resposta é afirmativa e a primeira demonstração foi dada por Mathias ([18]) usando uma teoria de aproximação de dimensão finita inspirada no tratamento de Milnor para o problema de geodésicas entre dois pontos. No intuito de recuperar a demonstração de Gromoll e Meyer, F. de Souza obteve em sua tese de doutoramento ([10]) um lema de Morse no estilo de Gromoll e Meyer (sem hipótese de não degenerescência) com hipóteses de diferenciabilidade mais baixas (veja no capítulo 6), de fato, com as hipóteses de diferenciabilidade satisfeitas pela energia de Finsler. A partir deste lema os argumentos de Gromoll e Meyer se aplicam novamente.

No capítulo 6 veremos que as propriedades de diferenciabilidade satisfeitas pela energia de Finsler também são verificadas para uma classe maior de problemas variacionais que chamamos de problemas variacionais super regulares, de modo que podemos obter resultados similares ao de Gromoll e Meyer para estes problemas.

## 2 Cálculo em Espaços de Banach

### 2.1 Diferenciabilidade

**Definição 2.1.1.** Sejam  $\mathbb{E}, \mathbb{F}$  dois espaços de Banach sobre  $\mathbb{R}$  e uma função  $f : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ ,  $U$  aberto. Dizemos que  $f$  é diferenciável em  $x_0$  (segundo Fréchet) se existir uma aplicação  $df_{x_0} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  linear e contínua tal que  $\forall h$  com  $h + x_0 \in U$  vale :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + df_{x_0}h + r(h) \text{ e } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$$

A aplicação  $df_{x_0}$  é chamada de diferencial (ou derivada) de  $f$  em  $x_0$ . Às vezes denotaremos  $df_{x_0}$  por  $f'(x_0)$ . Se  $f$  é diferenciável em todo ponto dizemos simplesmente que  $f$  é diferenciável.

**Proposição 2.1.1.**

1. Se  $f$  é diferenciável em  $x_0$  também é contínua.
2. Se  $f$  é diferenciável em  $x_0$  então a diferencial é única.
3. Se  $f$  é contínua em  $x_0$  e  $A$  é uma aplicação linear t.q.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - Ah\|}{\|h\|} = 0$  então  $A$  é contínua.
4. Vale a regra da cadeia.

**Dem.:**

1. Direto da continuidade de  $df_{x_0}$  e de  $r$  em 0.
2. Tome  $h \in \mathbb{E}, t \in \mathbb{R}$ . Temos  $df_{x_0}(th) + r(th) = f(x_0 + th) - f(x_0)$ , de onde segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} = df_{x_0}h$$

A unicidade de  $df_{x_0}$  segue da unicidade do limite.

3.  $\|Ah\| \leq \|Ah - f(x_0 + h) + f(x_0)\| + \|f(x_0 + h) - f(x_0)\| \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \|Ah\| = 0 \Rightarrow A$  é contínua.
4. Temos que  $f(x_0 + h) = f(x_0) + \underbrace{df_{x_0}h + r_1(h)}_k$ . Assim

$$g(f(x_0 + h)) = g(f(x_0) + k) = g(f(x_0)) + dg_{f(x_0)}k + r_2(k), \text{ ou ainda,}$$

$$g(f(x_0 + h)) = g(f(x_0)) + (dg_{f(x_0)}df_{x_0})h + \underbrace{(dg_{f(x_0)}r_1(h) + r_2(h))}_{r_3(h)}.$$

$dg_{f(x_0)}df_{x_0}$  é contínua, pois é composição de contínuas;  $r_3$  satisfaz a definição 2.1.1 pois  $\frac{\|k\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \|df_{x_0}\|$  e  $\|dg_{f(x_0)}r_1(h)\| \leq \|dg_{f(x_0)}\| \|r_1(h)\|$ . Assim  $g \circ f$  é diferenciável e  $d(g \circ f)_{x_0} = dg_{f(x_0)}df_{x_0}$ .

□

**Teorema 2.1.2. (Desigualdades do valor médio) :**

1. Sejam  $J = [a, b]$ ,  $f : J \rightarrow \mathbb{E}$ ,  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas e diferenciáveis em  $(a, b)$ . Suponha que  $\|df_t\| \leq |\varphi'(t)| \quad \forall t$ . Então  $\|f(b) - f(a)\| \leq |\varphi(b) - \varphi(a)|$ .
2. Se  $\|df_t\| \leq M \Rightarrow \|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a)$ .
3. Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{F}$  tal que  $x_0 + ty_0 \in U$  e exista  $f'(x_0 + ty_0) \forall t \in [0, 1]$ . Entao existe  $M$  tal que  $\|f(x_0 + y_0) - f(y_0)\| \leq M\|y_0\|$ .

Denote por  $L_k(\mathbb{E}, \mathbb{F})$  o conjunto das aplicações k-lineares contínuas de  $\mathbb{E}$  em  $\mathbb{F}$ . Se  $f$  é diferenciável em  $U$  podemos olhar para a aplicação  $f' : U \rightarrow L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$  e perguntarmos se  $f'$  é diferenciável. Assim definimos, indutivamente, a n-ésima derivada de  $f$  ( $f^{(n)} = d^n f$ ) e escreveremos que  $f$  é  $C^k$  se a k-ésima derivada de  $f$  for uma função contínua.

Dizemos que uma bijeção  $f: U \subset \mathbb{E} \rightarrow V \subset \mathbb{F}$  é um difeomorfismo  $C^k$  se  $f$  e  $f^{-1}$  forem  $C^k$ .

Temos ainda um conceito de diferenciabilidade mais fraco :

**Definição 2.1.2.** Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{F}$ ,  $x_0 \in U$  como na definição 2.1.1.  $f$  é diferenciável (segundo Gateaux) se existir aplicação linear limitada  $A : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  t.q.  $\forall h \in \mathbb{E}$  vale :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} = Ah$$

A é chamada diferencial de Gateaux de  $f$  em  $x_0$  e será denotada por  $f'_G(x_0)$ .

**Observação:** Uma função diferenciável segundo Gateaux pode não ser contínua e, portanto, não diferenciável segundo Fréchet. Estude  $(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2})^2$  por exemplo.

**Proposição 2.1.3.** A diferencial de Gateaux é única. Se  $f$  é diferenciável (segundo Fréchet) também é segundo Gateaux. Se  $f$  é diferenciável segundo Gateaux e  $f'_G : U \rightarrow L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$  é contínua em  $x_0 \Rightarrow f$  é diferenciável em  $x_0$  e  $df_{x_0} = f'_G(x_0)$ .

**Proposição 2.1.4.** Suponha  $f$  diferenciável segundo Gateaux em  $U$ . Sejam  $x_1, x_2 \in U$  t.q.  $\forall t \in [0, 1] \Rightarrow \gamma(t) = tx_1 + (1 - t)x_2 \in U$ . Então :

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq \left( \sup_{0 \leq t \leq 1} \|f'_G(\gamma(t))\| \right) \|x_1 - x_2\|$$

**Dem.:** Considere  $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{F}$ .  $f \circ \gamma$  é diferenciável e  $(f \circ \gamma)'(t) = f'_G(\gamma(t))(x_2 - x_1)$ . Tome  $\varphi \in \mathbb{F}' \Rightarrow \varphi \circ f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável. Usando o teorema do valor médio :

$$\varphi(f(x_2) - f(x_1)) = \varphi \left( f'_G(sx_1 + (1 - s)x_2)(x_2 - x_1) \right) \text{ para algum } 0 \leq s \leq 1$$

Assim temos  $|\varphi(f(x_2) - f(x_1))| \leq \|\varphi\| \left( \sup_{0 \leq t \leq 1} \|f'_G(\gamma(t))\| \right) \|x_1 - x_2\|$ . Evocando o teorema de Hahn-Banach, escolha  $\varphi$  t.q.  $\|\varphi\| = 1$ ,  $\varphi(f(x_2) - f(x_1)) = \|f(x_2) - f(x_1)\|$ .

□

**Teorema 2.1.5.** Se  $f$  é duas vezes diferenciável em  $x_0 \Rightarrow f''(x_0) \in L_2(\mathbb{E}, \mathbb{F})$  é simétrica.

**Dem.:** Tome  $h, k \in \mathbb{E}$  “pequenos” e defina

$$\begin{aligned}\psi(h, k) &= f(x_0 + h + k) - f(x_0 - h) - f(x_0 + k) + f(x_0) \\ \gamma_h(\xi) &= f(x_0 + h + \xi) - f(x_0 + \xi)\end{aligned}$$

Assim  $\psi(h, k) - f''(x_0)(h, k) = \gamma_h(k) - \gamma_h(0) - f''(x_0)(h, k)$ . Fixando  $h$  temos  $f''(x_0)(h, \cdot) : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  linear e limitada. Aplicando a proposição 2.1.4 a  $\psi - f''(x_0)$  na variável  $k$  obtemos :

$$\begin{aligned}\|\psi(h, k) - f''(x_0)(h, k)\| &\leq \left( \sup_{0 \leq t \leq 1} \|d(\gamma_h(k) - \gamma_h(0) - f''(x_0)(h, \cdot))_{tk}\| \right) \|k\| = \\ &= \sup_{0 \leq t \leq 1} \|f'(x_0 + h + tk) - f'(x_0 + tk) - f''(x_0)(h, \cdot)\| \|k\|\end{aligned}$$

Seja  $\sigma(x_0, v) = f'(x_0 + v) - f'(x_0) - f''(x_0)(v, \cdot)$ . Como  $f$  é duas vezes diferenciável em  $x_0$  temos  $\|\sigma(x_0, v)\| \leq \varepsilon \|v\|$  se  $\|v\| < \delta$ . Tome, então,  $h, k$  t.q.  $\|h\| \leq \varepsilon/2, \|k\| \leq \delta/2$  :

$$\|\psi(h, k) - f''(x_0)(h, k)\| \leq \left( \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\sigma(x_0, h + tk) - \sigma(x_0, tk)\| \right) \|k\| \leq \varepsilon(\|h\| + 2\|k\|)\|k\|$$

Analogamente, trocando o lugar de  $h$  e  $k$

$$\|\psi(k, h) - f''(x_0)(k, h)\| \leq \varepsilon(2\|h\| + \|k\|)\|h\|$$

Como  $\psi$  é simétrica segue que

$$\|f''(x_0)(h, k) - f''(x_0)(k, h)\| \leq 2\varepsilon(\|h\|\|k\| + \|h\|^2 + \|k\|^2)$$

sempre que  $\|h\| \leq \delta/2$  e  $\|k\| \leq \delta/2$ . Mas  $f''(x_0)$  é homogênea de grau 2 em  $(h, k) \Rightarrow \forall h, k, \varepsilon$ , a desigualdade acima vale e o resultado segue. □

**Corolário 2.1.5.1.**  $f^k(x_0) \in L_k(\mathbb{E}, \mathbb{F})$  é simétrica.

**Observação:** A aplicação bilinear  $d^2 f_x : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{F}$  é chamada de hessiana de  $f$  em  $x$ . No caso em que  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , a hessiana de  $f$  é uma forma bilinear simétrica. Dizemos que uma forma bilinear simétrica  $B$  num espaço de Banach  $\mathbb{E}$  é não degenerada, se a aplicação linear  $T_B : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}^*$  dada por  $T_B(u)v = B(u, v)$ , for um isomorfismo linear, caso contrário,  $B$  é dita degenerada. Além disso, definimos o índice de  $B$  ( $\text{ind}(B)$ ) como sendo o supremo das dimensões dos subespaços  $\mathbb{V} \subset \mathbb{E}$  t.q.  $B$  é negativa definida. O coíndice de  $B$  será o índice de  $-B$ .

**Definição 2.1.3.** Sejam  $U_1 \subset \mathbb{E}_1, U_2 \subset \mathbb{E}_2, U = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 = \mathbb{E}$ . Considere  $f : U \rightarrow \mathbb{F}$  e, para  $(x_0, y_0) \in U$ , defina  $f_{x_0} : U_2 \rightarrow \mathbb{F}, f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$ . Analogamente defina  $f_{y_0}$ . As diferenciais de  $f_{x_0}, f_{y_0}$ , se existirem, serão chamadas de derivadas parciais de  $f$  em  $(x_0, y_0)$  em relação à primeira e segunda variável, respectivamente. Elas serão denotadas por  $d_i f_{(x_0, y_0)}, i = 1, 2$ .

**Observação:** Veja que a existência das derivadas parciais seguem da existência da diferencial de Gateaux. Podemos generalizar esta definição para um número finito de “variáveis”. Também podemos definir as derivadas parciais de ordem superior de  $f : d_i(d_j f) = d_{i,j} f$ . Assim, se  $f$  for duas vezes diferenciável, o teorema 2.1.5 diz que  $d_{i,j} f_{x_0, y_0} = d_{j,i} f_{x_0, y_0}$ .

### Proposição 2.1.6.

1. Se  $d_i f : U \rightarrow L(\mathbb{E}_i, \mathbb{F})$  está definida e é contínua  $\Rightarrow df : U \rightarrow L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$  está definida, é contínua e

$$df_{(x_0, y_0)}(h_1, h_2) = d_1 f_{(x_0, y_0)} h_1 + d_2 f_{(x_0, y_0)} h_2$$

2. Considere  $f : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2$  e  $\pi_i$  a projeção na  $i$ -ésima coordenada. Mostre que  $f$  é diferenciável se, e só se,  $\pi_i \circ f$  é diferenciável para todo  $i$ .

Vamos agora definir mais alguns conceitos que faremos uso mais tarde.

**Definição 2.1.4.** Suponha que  $l$  seja um funcional linear contínuo,  $l \neq 0$ , em  $\mathbb{E}$ , chamaremos de meio espaço (positivo) determinado por  $l$  o conjunto  $\mathbb{E}^+ = \{x \in \mathbb{E}; l(x) \geq 0\}$ . O conjunto  $\partial\mathbb{E}^+ = \{x \in \mathbb{E}; l(x) = 0\}$  é chamado de bordo de  $\mathbb{E}^+$ . Se  $U \subset \mathbb{E}^+$  é aberto, diremos que uma função  $f: U \rightarrow \mathbb{F}$  é  $C^k$  num ponto  $x \in U \cap \partial\mathbb{E}^+$  se existir uma função  $C^k$   $g: V \rightarrow \mathbb{F}$ , onde  $V$  é uma vizinhança de  $x$  em  $\mathbb{E}$ , coincidindo com  $f$  em  $U \cap V$ . Dessa maneira definimos  $d^n f_x = d^n g_x$ .

**Definição 2.1.5.** Dada uma função  $C^{k-1}$ ,  $f: U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ , se  $d^{k-1}f: U \rightarrow L_{k-1}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$  for localmente lipschitziana dizemos que  $f$  é de classe  $C^{k-}$ .

## 2.2 Integração

**Definição 2.2.1.** Uma função  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$  é chamada de função escada se existir uma partição de  $[a, b]$ ,  $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ , t.q.  $g|_{(t_i, t_{i+1})}$  é constante. Uma função regulada é o limite uniforme de uma sequência de funções escadas.

**Definição 2.2.2.** Se  $g$  é uma função escada subordinada à partição  $\{t_i\}$ ,  $g|_{(t_i, t_{i+1})} = c_i$ , definimos a integral de  $g$  por

$$\int_a^b g := \sum_{i=0}^{n-1} c_i (t_{i+1} - t_i)$$

Para uma função regulada  $h = \lim g_n$ , definimos

$$\int_a^b h := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n$$

**Observação:** É razoavelmente claro que a definição acima está bem feita, i.e., a integral de funções escadas não depende da partição do intervalo e o  $\lim \int_a^b g_n$  existe e não depende da sequência escolhida.

As seguintes propriedades são de demonstração imediata

### Proposição 2.2.1.

1. Toda função contínua é regulada.
2.  $\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$ .
3. Se  $h$  é regulada e  $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  é linear limitada  $\Rightarrow T \int_a^b h = \int_a^b T \circ h$ .
4. Seja  $h$  regulada e  $|h| : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ ,  $|h|(t) = \|h(t)\|$ . Temos  $\|\int_a^b h\| \leq \int_a^b |h|$  e  $\int_a^b h = \int_a^{t_0} h + \int_{t_0}^b h$ .

**Teorema 2.2.2. (Fundamental do Cálculo):** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$  contínua e defina  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$  por :

$$g(t) := \int_a^t f$$

Então  $g$  é diferenciável e  $g'(t_0)(1) = f(t_0)$ .

**Dem.:** Fixe  $t_0 \in [a, b]$  e tome  $\varepsilon > 0$ . Mostremos que existe  $\delta > 0$  tal que se  $|s| < \delta$  então

$$\left\| \int_a^{t_0+s} f - \int_a^{t_0} f - f(t_0)s \right\| = \left\| \int_{t_0}^{t_0+s} f - f(t_0)s \right\| \leq \varepsilon|s|$$

Pela continuidade de  $f$  encontramos  $\delta$  t.q. ,  $|s| \leq \delta \Rightarrow \|f(t_0 + s) - f(t_0)\| \leq \varepsilon$ . Então

$$\left\| \int_{t_0}^{t_0+s} f - f(t_0)s \right\| \left\| \int_{t_0}^{t_0+s} f - \int_{t_0}^{t_0+s} f(t_0) \right\| = \left\| \int_{t_0}^{t_0+s} (f - f(t_0)) \right\| \leq \int_{t_0}^{t_0+s} \|f - f(t_0)\| \leq \varepsilon|s|$$

□

**Corolário 2.2.2.1.** Se  $f : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  é  $C^1$  e  $x_0, y_0 \in U$  com  $x_0 + ty_0 \in U \forall t \in [0, 1]$  vale :

$$f(x_0 + y_0) - f(x_0) = \int_0^1 f'(x_0 + ty_0)y_0$$

**Teorema 2.2.3. (Fórmula de Taylor):** Considere  $f : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  de classe  $C^p$  e  $x_0, y_0 \in U$  t.q. para todo  $t \in [0, 1], x_0 + ty_0 \in U$ . Então :

$$f(x_0 + y_0) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n!} d^n f_{x_0} y_0^n + \int_0^1 g_k \quad \forall k = 1, \dots, p \quad (2.2.1)$$

onde

$$d^n f_{x_0} y_0^n := d^n f_{x_0} \underbrace{(y_0, \dots, y_0)}_{n \text{ vezes}} \quad \text{e} \quad g_k(t) = \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x_0 + ty_0) y_0^k$$

**Dem.:** Para  $k=1$  está claro. Usando indução em  $k$ , suponha que

$$f(x_0 + y_0) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{k-2} \frac{1}{n!} d^n f_{x_0} y_0^n + \int_0^1 g_{k-1} \quad (2.2.2)$$

e defina  $\varphi(t) = \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}$ ,  $F(t) = f^{(k-1)}(x_0 + ty_0) y_0^{k-1}$ . Agora integre

$$\int_0^1 (\varphi F)' = \int_0^1 \varphi' F + \int_0^1 \varphi F'$$

obtendo

$$\begin{aligned} -\frac{f^{(k-1)}(x_0) y_0^{k-1}}{(k-1)!} &= -\int_0^1 \frac{(1-t)^{k-2}}{(k-2)!} f^{(k-1)}(x_0 + ty_0) y_0^{k-1} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x_0 + ty_0) y_0^k = \\ &= -\int_0^1 g_{k-1} + \int_0^1 g_k \end{aligned}$$

Ou seja :

$$\int_0^1 g_{k-1} = \int_0^1 g_k + \frac{f^{(k-1)}(x_0) y_0^{k-1}}{(k-1)!} \quad (2.2.3)$$

Substituindo (2.2.3) em (2.2.2) obtemos (2.2.1).

□

**Corolário 2.2.3.1.** Nas hipóteses do teorema 2.2.3 temos

$$\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + y) - f(x_0) - \sum_1^{k-1} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) y_0^n}{\|y\|^k} = 0$$

**Definição 2.2.3.** Dados espaços de Banach  $\mathbb{E}, \mathbb{F}$  e uma função  $f : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  definida num aberto de  $\mathbb{E}$ , dizemos que  $f$  é fortemente diferenciável em  $x$  se  $f$  for diferenciável em  $x$  e

$$\lim_{y, z \rightarrow x} \frac{r(y) - r(z)}{\|y - z\|} = 0$$

onde  $r(y)$  é o resto da expansão em fórmula de Taylor de  $f$  em torno de  $x$  :

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + r(y)$$

**Observação:** Em outras palavras,  $f$  é fortemente diferenciável em  $x$  se, e só se, for diferenciável e dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma vizinhança de  $x$  onde  $r(y)$  é lipschitziana de constante  $\varepsilon$ . Em particular  $f$  é lipschitziana em tal vizinhança. É claro que se  $f$  for diferenciável em uma vizinhança de  $x$ ,  $f$  será fortemente diferenciável em  $x$  se, e somente se,  $f'$  for contínua em  $x$ .

## 2.3 Teorema da Função Inversa

**Teorema 2.3.1. (Teorema da Contração de Banach-Caccioppoli) :** Seja  $\mathbb{M}$  um espaço métrico completo na distância  $d$  e  $T : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$  uma função que, para algum  $k \in [0, 1)$  vale

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$$

Então  $T$  é chamada de contração e possui um único ponto fixo  $x_0$ . Além disso, para todo  $x \in \mathbb{M}$ , a sequência  $(T^n(x))$  converge para  $x_0$ .

**Observação:** A demonstração usual feita em dimensão finita funciona aqui.

**Teorema 2.3.2. (Teorema da Função Inversa):** Se  $f : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  é de classe  $C^k, k \geq 1$  e  $x_0 \in U$  é t.q.  $f'(x_0) : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  é isomorfismo linear  $\Rightarrow \exists U_0 \ni x_0, U_1 \subset \mathbb{F}$  t.q.  $f|_{U_0} : U_0 \rightarrow U_1$  tem inversa de classe  $C^k$ .

**Dem.:** É suficiente supormos  $\mathbb{F} = \mathbb{E}, f'(x_0) = I, x_0 = 0 = f(x_0)$ .

Seja  $g(x) = x - f(x) \Rightarrow g \in C^k(\mathbb{E}), g(0) = 0$ . Tome  $r > 0$  tal que  $\|x\| \leq r \Rightarrow \|g'(x)\| \leq \frac{1}{2}$ . Usando o teorema do valor médio obtemos  $\|g(x)\| \leq \sup\{\|g'(tx)\|\|x\|; 0 \leq t \leq 1\}$ , portanto  $g(\overline{B_r(0)}) \subset \overline{B_{r/2}(0)}$ .

**Fato :**  $\forall y \in \overline{B_{r/2}(0)} \quad \exists! x \in \overline{B_r(0)}$  t.q.  $f(x) = y$ .

De fato, seja  $g_y(x) = x + y - f(x)$ . se  $\|y\| \leq r/2, \|x\| \leq r \Rightarrow \|g_y(x)\| \leq \|y\| + \|g(x)\| \leq r$ . Então  $g_y(\overline{B_r(0)}) \subset \overline{B_r(0)}$  e  $\|g_y(x_1) - g_y(x_2)\| \leq \sup \|g'(z)\|\|x_2 - x_1\| \leq \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\|$ . Logo  $g_y$  é uma contração e o fato segue pelo teorema da contração de Banach.

**Fato :**  $\forall y \in \overline{B_{r/2}(0)} \quad \exists! x \in \overline{B_r(0)}$  t.q.  $f(x) = y$ .

Se  $y \in \overline{B_{r/2}(0)} \subset \overline{B_r(0)}$  encontramos tal  $x \in \overline{B_r(0)}$ . Mas  $x = g_y(x) + f(x) - y = g_y(x)$ , logo  $\|x\| = \|g_y(x)\| \leq \|y\| + \|g(x)\| < r$ , ou seja,  $x \in B_r(0)$ .



Defina  $U_1 = f^{-1}(B_{r/2}(0)) \cap B_r(0)$ ,  $U_2 = B_{r/2}(0)$ . Assim  $f : U_1 \rightarrow U_2$  é bijetora, portanto, tem inversa.

**Fato :**  $f^{-1}$  é contínua.

De fato,  $\|x_1 - x_2\| = \|x_1 + f(x_1) - f(x_1) - x_2 - f(x_2) + f(x_2)\| \leq \|f(x_1) - f(x_2)\| + \|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \|f(x_1) - f(x_2)\| + \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$ . Portanto  $\|x_1 - x_2\| \leq 2\|f(x_1) - f(x_2)\|$ .

**Fato :**  $f^{-1} \in C^k(\mathbb{E})$ .

Como  $\|g'(x)\| \leq 1/2$  se  $\|x\| \leq r$  segue que  $f'(x) = I - g'(x)$  é invertível. Mostremos que  $d(f^{-1})_{f(x)} = f'(x)^{-1}$ . Seja  $y = f(x)$ ,  $y_1 = f(x_1)$

$$\begin{aligned} \|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_1) - [f'(x_1)]^{-1}(y - y_1)\| &= \|x - x_1 - [f'(x_1)]^{-1}(y - y_1)\| = \\ \|x - x_1 - [f'(x_1)]^{-1}(f'(x_1)(x - x_1) + r(x - x_1))\| &= \|[f'(x_1)]^{-1}r(x - x_1)\| \leq \\ \|f'(x_1)\|^{-1}\|r(x - x_1)\| \end{aligned}$$

Agora se  $\|x - x_1\| \leq 2\|y - y_1\| \Rightarrow \lim_{y \rightarrow y_1} \frac{r(x - x_1)}{\|y - y_1\|} = 0$  pela continuidade de  $f^{-1}$ . Logo  $d(f^{-1})_{f(x)} = f'(x)^{-1} \Rightarrow f^{-1} \in C^k(\mathbb{E})$ , pois  $f'(x_1) \mapsto [f'(x_1)]^{-1} \in C^\infty$ . □

Uma aplicação importante deste teorema é o

**Teorema 2.3.3. (Teorema da Função Implícita) :** Seja  $f : U = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ , com  $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$ , de classe  $C^k, k \geq 1$ . Tome  $(x_0, y_0) \in U$  e suponha que  $d_2 f_{(x_0, y_0)} : \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{F}$  seja um isomorfismo com  $f(x_0, y_0) = 0$ . Então existe  $g : \widetilde{U}_1 \subset U_1 \rightarrow U_2$  contínua com  $g(x_0) = y_0$  e  $f(x, g(x)) \equiv 0$ . Mais ainda  $\widetilde{U}_1$  pode ser tomada de forma a  $g$  ser  $C^k$ .

**Dem.:** Como antes podemos supor  $\mathbb{E}_2 = \mathbb{F}$ ,  $d_2 f_{(x_0, y_0)} = I_{\mathbb{F}}$ . Considere  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{E}_1 \times \mathbb{F} = \mathbb{E}$  definida por  $\varphi(x, y) = (x, f(x, y))$ . Portanto

$$\varphi'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} I_{\mathbb{E}_1} & 0 \\ d_1 f_{(x_0, y_0)} & d_2 f_{(x_0, y_0)} \end{pmatrix}$$

Logo  $\varphi$  é invertível perto de  $(x_0, y_0)$ . Defina  $\psi = \varphi^{-1} \Rightarrow \psi(x, z) = (x, h(x, z)), h \in C^k(\mathbb{F})$ . Considere  $g(x) = h(x, 0)$ , temos :

$$(x, f(x, g(x))) = \varphi(x, g(x)) = \varphi(x, h(x, 0)) = \varphi(\psi(x, 0)) = (x, 0)$$

e assim  $f(x, g(x)) = 0$ . □

**Observação:** Observe que a demonstração do teorema da função inversa e, consequentemente, da função implícita, funciona se supusermos apenas que a função é contínua e fortemente diferenciável no ponto em questão. Obviamente que  $f$  será apenas um homeomorfismo fortemente diferenciável em tal ponto. Usaremos esta versão no capítulo 6.

## 2.4 Equações Diferenciais Ordinárias

**Definição 2.4.1.** Um campo de vetores em  $U \subset \mathbb{E}$  é uma função  $X : U \rightarrow \mathbb{E}$ . Assumiremos que  $X$  é no mínimo  $C^0$ . Uma curva integral de  $X$  com condição inicial  $x_0 \in U$  é uma função  $C^k, k \geq 1, \alpha : J \rightarrow U$ , onde  $J$  é um intervalo contendo 0, e t.q.

$$\alpha(0) = x_0 \quad \alpha'(t) = X(\alpha(t)) \quad (2.4.1)$$

A equação (2.4.1) é equivalente à seguinte :

$$\alpha(t) = x_0 + \int_0^t f \circ \alpha \quad (2.4.2)$$

**Definição 2.4.2.** Uma função  $\alpha : J \times U_{x_0} \rightarrow U$ , onde  $U_{x_0}$  é uma vizinhança aberta de  $x_0$ , tal que  $\forall x \in U_{x_0}$  a função  $\alpha_x(t) = \alpha(t, x)$  é uma curva integral de  $X$  com condição inicial  $x$  é chamada de fluxo local de  $X$  em  $x_0$ .

**Teorema 2.4.1. (Picard) :** Seja  $X : U \rightarrow \mathbb{E}$  um campo vetorial  $k$ -lipschitziano. Considere  $x_0 \in U$ ,  $a \in (0, 1)$  t.q.  $\overline{B_{2a}(x_0)} = \{y; \|y - x_0\| \leq 2a\} \subset U$  e  $\|X(x)\| \leq L \quad \forall x \in \overline{B_{2a}(x_0)}$ . Escolha  $b > 0$ ,  $b < \min\{a/L, 1/k\}$ . Então existe único fluxo local  $\alpha : (-b, b) \times B_a(x_0) \rightarrow U$ .

**Dem.:** Tome  $x \in \overline{B_a(x_0)}$  e defina

$$M = \{\alpha : [-b, b] \rightarrow \overline{B_{2a}(x_0)}; \alpha \text{ contínua com } \alpha(0) = x\}$$

$M$  é fechado em  $C^0([-b, b], \mathbb{E})$  e, portanto, completo na norma induzida (norma do sup).

Para cada  $\alpha \in M$  defina  $(T\alpha)(t) = x + \int_0^t X \circ \alpha$ . Então  $\|T\alpha(t) - x\| \leq bL < a$  e  $T\alpha(0) = x$ , portanto,  $T(M) \subset M$ . Além disso, se  $\alpha, \beta \in M \Rightarrow$

$$\|T\alpha - T\beta\| \leq b \sup_{s \in [-b, b]} \|X(\alpha(s)) - X(\beta(s))\| \leq bk\|\alpha - \beta\|$$

Agora  $bk < 1 \Rightarrow T$  é contração. Sendo  $M$  não vazio, o resultado segue pelo Teorema da contração de Banach

□

**Corolário 2.4.1.1.** A aplicação  $x \mapsto \alpha_x$  definida de  $\overline{B_a(x_0)}$  em  $C^0([-b, b], \mathbb{E})$ , é lipschitziana.

**Dem.:** Seja  $T_x$  a contração definida no teorema 2.4.1 referente ao ponto inicial  $x$ . Então temos  $\|\alpha_x - T_y \alpha_x\| = \|(T_x - T_y)\alpha_x\| \leq \|x - y\|$ . Defina  $c = bk$ . Assim

$$\|\alpha_x - T_y^n \alpha_x\| \leq \|\alpha_x - T_y \alpha_x\| + \dots + \|T_y^{n-1} \alpha_x - T_y^n \alpha_x\| \leq (1 + c + \dots + c^{n-1})\|x - y\|$$

Como  $\lim_n T_y^n \alpha_x = \alpha_y$  e  $0 < c < 1$ , temos  $\|\alpha_x - \alpha_y\| \leq (\sum c^k)\|x - y\|$ .

□

**Observação:** Se  $\mathbb{E}$  tiver dimensão finita é possível demonstrar a existência de curvas integrais para campos contínuos, perdendo a unicidade (Teorema de Peano). Porém, existem exemplos de campos contínuos em espaços de Hilbert de dimensão infinita, que não possuem curvas integrais.

## 3 Variedades Diferenciáveis

### 3.1 Variedades e Fibrados

**Definição 3.1.1.** Sejam  $\mathbb{E}$  um espaço de Banach e  $M$  um espaço topológico qualquer. Uma carta modelada em  $\mathbb{E}$  para  $M$ , ou uma  $\mathbb{E}$ -carta para  $M$ , é um par  $(U, \varphi)$ ,  $\varphi : U \subset \mathbb{E} \rightarrow M$ , onde  $U$  é aberto e  $\varphi$  é contínua tais que :

1.  $\varphi(U)$  é aberto em  $M$ .
2.  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  é um homeomorfismo.

Se  $\mathbb{F}$  é outro espaço de Banach e  $(V, \psi)$  é uma  $\mathbb{F}$ -carta para  $M$ , dizemos que ela é  $C^k$  compatível com  $(U, \varphi)$  se  $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(\psi(V)) \rightarrow \psi^{-1}(\varphi(U))$  e  $\varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(\varphi(U)) \rightarrow \varphi^{-1}(\psi(V))$  forem funções  $C^k$ .

Um atlas  $C^k$  modelado em  $\mathbb{E}$  para  $M$ , ou um  $\mathbb{E}$ - $C^k$ -atlas para  $M$ , é uma coleção  $\mathbb{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$  de  $\mathbb{E}$ -cartas  $C^k$  compatíveis tais que  $\bigcup \varphi(U_i) = M$ . Dois atlas são ditos  $C^k$  equivalentes se qualquer carta de um for  $C^k$  compatível com qualquer carta do outro.

**Proposição 3.1.1.** Sejam  $(U, \varphi), (V, \psi)$  uma  $\mathbb{E}$ -carta e uma  $\mathbb{F}$ -carta para  $M$  com  $\varphi^{-1}(\psi(V)) \neq \emptyset$ . Se  $(U, \varphi), (V, \psi)$  são  $C^k$  compatíveis ( $k > 0$ ) então  $\mathbb{E}$  e  $\mathbb{F}$  são espaços de Banach isomorfos.

**Observação:** Pela proposição anterior, se  $M$  for conexa, podemos exigir, sem perda de generalidade, que todas as cartas de um atlas  $C^k, k > 0$ , estejam modeladas no mesmo espaço de Banach. Observe também que dois atlas são equivalentes se, e só se, sua união é ainda compatível.

**Definição 3.1.2.** Uma  $\mathbb{E}$ - $C^k$  estrutura diferenciável em  $M$  é uma classe de atlas equivalentes. Dessa forma podemos associar a uma estrutura diferenciável em  $M$  um atlas maximal em relação à  $C^k$  compatibilidade.

**Definição 3.1.3.** Uma  $\mathbb{E}$ - $C^k$  variedade diferenciável é um par  $(M, \mathcal{F})$ , onde  $M$  é um espaço de Hausdorff satisfazendo o segundo axioma da enumerabilidade e  $\mathcal{F}$  é uma estrutura diferenciável em  $M$ .

**Observação:** Se permitirmos que  $U$  seja um aberto de um meio espaço de Banach na definição 3.1.1 obtemos o conceito de variedade com bordo, sendo que o bordo de  $M$  é o conjunto dos pontos  $x \in M$  para os quais existe uma carta  $(\varphi, U)$  com  $U \subset \mathbb{E}^+$  e tal que  $\varphi^{-1}(x) \in U \cap \partial \mathbb{E}^+ \neq \emptyset$ . O bordo de  $M$  será denotado por  $\partial M$ .

**Definição 3.1.4.** Uma  $C^k$ -fibrção sobre uma  $\mathbb{E}$ - $C^l$  variedade  $M$  ( $l \geq k$ ) é uma trinca  $(\mathcal{M}, \mathbb{F}, p)$ , onde  $\mathbb{F}$  é um espaço de Banach,  $\mathcal{M}$  é uma  $C^k$  variedade modelada em  $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$  e  $p$  é uma função  $C^k$   $p: \mathcal{M} \rightarrow M$  que satisfaz

1.  $\forall x \in M$ ,  $p^{-1}(x)$  tem estrutura de espaço vetorial linearmente homeomorfa a  $\mathbb{F}$  ( $\mathbb{F}$  é chamado de fibra e  $p^{-1}(x)$  é a fibra sobre  $x$ ).

2. Existe cobertura aberta  $\{U_i\}$  de  $M$  e difeomorfismos  $C^k, \varphi_i : U_i \times \mathbb{F} \rightarrow p^{-1}(U_i)$  que são isomorfismos lineares em cada fibra e tornam o diagrama abaixo comutativo

$$\begin{array}{ccc} U_i \times \mathbb{F} & \xrightarrow{\varphi_i} & p^{-1}(U_i) \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow p \\ U_i & \xrightarrow{1} & U_i \end{array}$$

onde  $\pi_1$  é a projeção na primeira coordenada.

**Definição 3.1.5.** Considere  $(M, \mathcal{F})$  e  $(N, \mathcal{G})$   $\mathbb{E}$ - $C^k$  e  $\mathbb{F}$ - $C^k$  variedades. Seja  $f : M \rightarrow N$  uma função contínua. Dizemos que  $f$  é de classe  $C^r, r \leq k$ , em  $x_0 \in M$  se, para toda carta  $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{F}$  tal que  $x_0 \in \varphi_i(U_i)$  e  $(V_j, \psi_j) \in \mathcal{G}$  com  $f(x_0) \in \psi_j(V_j)$ ,  $\psi_j^{-1} \circ f \circ \varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{F}$  for  $C^r$  em  $\varphi_i^{-1}(x_0)$ . Se  $U \subset M$  for aberto diremos que  $f \in C^r(U)$  se for  $C^r$  em todo ponto de  $U$ . Analogamente obtemos o conceito de função  $C^{r-}$  entre variedades.

Tome uma  $\mathbb{E}$ - $C^k$  estrutura diferenciável  $\mathcal{F} = \{(U_i, \varphi_i) : i \in \mathcal{I}\}$  em  $M$ . Seja  $\mathcal{TM} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i \times \mathbb{E} \times \{i\}$  e defina

$$(x_0, v, i) \sim (y_0, w, j) \Leftrightarrow x_0 = \varphi_i^{-1} \varphi_j(y_0) \quad \text{e} \quad v = d(\varphi_i^{-1} \varphi_j)_{y_0}(w)$$

Veja que  $\sim$  é uma relação de equivalência.

**Proposição 3.1.2.**

1. A aplicação  $p : \frac{\mathcal{TM}}{\sim} \rightarrow M$  dada por  $p([x_0, v, i]) = \varphi_i(x_0)$  está bem definida e é contínua.
2.  $p : \frac{\mathcal{TM}}{\sim} \rightarrow M$  é uma fibração com fibra  $\mathbb{E}$ .
3.  $\frac{\mathcal{TM}}{\sim}$  tem uma  $(\mathbb{E} \times \mathbb{E})$ - $C^{k-1}$  estrutura diferenciável onde  $p$  é de classe  $C^{k-1}$ .

**Observação:** Veja que  $p^{-1}(y) = \cup_{v \in \mathbb{E}} [x, v, i]$ , para algum  $i$  t.q.  $y = \varphi_i(x), x \in U_i$ . Assim, temos um isomorfismo canônico de  $p^{-1}(y) \rightarrow \mathbb{E}$  dado por  $[x, v, i] \mapsto v$ .

**Definição 3.1.6.** O fibrado tangente a  $M$  é a variedade  $(\mathcal{TM}, \mathcal{TF})$  onde  $\mathcal{TM} = \frac{\mathcal{TM}}{\sim}$  e  $\mathcal{TF}$  é a estrutura diferenciável dada na proposição 3.1.2. A fibra  $p^{-1}(y)$  será chamada de espaço tangente a  $M$  em  $y$  e será denotado por  $T_y M$ .

**Proposição 3.1.3.** Se  $f : M \rightarrow N$  é uma função de classe  $C^r, r > 0$ , entre  $\mathbb{E}$ - $C^k$  variedades, ela induz uma aplicação  $C^{r-1}, Tf : \mathcal{TM} \rightarrow \mathcal{TN}$  que cobre  $f$ , ou seja,  $p_N \circ Tf = f \circ p_M$  e tal que  $Tf : p_M^{-1}(x) \rightarrow p_N^{-1}(f(x))$  é linear para todo  $x \in M$ .

**Dem.:** Sejam  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  as estruturas diferenciáveis de  $M$  e  $N$ . Tome  $x_0 \in M$  e escolha  $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{F}$  com  $x_0 \in \varphi_i(U_i)$ . Defina  $y_0 = \varphi_i^{-1}(x_0)$ . Escolha também  $(V_j, \psi_j) \in \mathcal{G}$  t.q.  $f(x_0) \in \psi_j(V_j)$  e defina  $z_0 = \psi_j^{-1}(f(x_0))$ . Então  $Tf$  será dada por

$$Tf([x_0, v, i]) = [\psi_j^{-1} f \varphi_i(x_0), d(\psi_j^{-1} f \varphi_i)_{x_0}(v), j]$$

□

**Notação:** Denotaremos por  $df_{x_0}$  ou  $f'(x_0)$  a restrição de  $Tf$  à fibra sobre  $x_0$ . Por simplicidade, dependendo da situação, um elemento de  $\mathcal{TM}$  poderá ser denotado por  $(x, v), v_x$  ou simplesmente  $v$ .

**Observação:** Veja que  $T$  é um funtor definido na categoria das  $\mathbb{E}\text{-}C^{k+1}$  variedades com  $C^{k+1}$  funções, a valores na categoria das  $C^k$  fibrações com  $C^k$  funções entre fibrados.

Podemos interpretar o conceito de espaço tangente de um ponto de vista mais geometricamente concreto. Uma curva de classe  $C^r$  em  $M$  passando por  $x_0$  é uma função  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ ,  $\varepsilon > 0$ , de classe  $C^r$  e com  $\alpha(0) = x_0$ . Duas curvas  $\alpha, \beta$  por  $x_0$  serão ditas tangentes (em  $x_0$ ) se, para toda função  $C^1$ ,  $f : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U$  vizinhança de  $x_0$ , tivermos  $d(f \circ \alpha)_0(1) = d(f \circ \beta)_0(1)$ . Assim temos definida uma classe de equivalência no conjunto das  $C^r$ -curvas por  $x_0$ .

**Proposição 3.1.4.** Existe uma correspondência biunívoca entre classes de equivalência de curvas tangentes e os elementos de  $T_{x_0}M$

Uma maneira trivial de obtermos uma fibração sobre  $M$  com fibra  $\mathbb{F}$  é considerar  $M \times \mathbb{F}$  que denotaremos por  $\tau_{\mathbb{F}}(M)$ . Dessa maneira, se  $f : M \rightarrow N$  é  $C^{k+1}$ , temos uma aplicação induzida  $\tau_{\mathbb{F}}(f) : \tau_{\mathbb{F}}(M) \rightarrow \tau_{\mathbb{F}}(N)$  dada por

$$\tau_{\mathbb{F}}(f)(x, v) = (f(x), df_x v)$$

Dessa forma,  $\tau$  é um funtor definido na categoria das  $\mathbb{E}\text{-}C^{k+1}$  variedades com  $C^{k+1}$  funções a valores na categoria das  $C^k$  fibrações com  $C^k$  funções entre fibrados.

**Definição 3.1.7.** Um funtor  $t$ , definido na categoria das  $\mathbb{E}\text{-}C^{k+1}$  variedades com valores na categoria dos  $C^k$  fibrados é dito um funtor tangente para fibrações se :

1.  $t(M)$  for um  $\mathbb{E}$ -fibrado sobre  $M$  e se  $f:M \rightarrow N$  temos a induzida  $t(f):t(M) \rightarrow t(N)$
2. Restrita a subcategoria dos espaços de Banach,  $t$  é naturalmente equivalente a  $\tau$
3. Se  $U \subset M$  for aberto e  $i:U \rightarrow M$  é inclusão, então  $t(U)=t(M)|_U$  e  $t(i)$  é a inclusão de  $t(U)$  em  $t(M)$ .

**Teorema 3.1.5.** O funtor  $T$  que leva  $M \mapsto TM$ ,  $f \mapsto Tf$  é tangente. Mais ainda, quaisquer dois funtores tangentes para fibrações são naturalmente equivalentes.

## 3.2 Campos de Vetores Tangentes

Considere que  $M$  seja uma  $\mathbb{E}\text{-}C^{k+1}$ -variedade com bordo,  $k \geq 1$ . Dada uma curva  $C^{k+1}$  em  $M$   $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ , definimos  $\alpha' : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM$ , o levantamento canônico de  $\alpha$ , da seguinte maneira, se  $(U_i, \varphi_i)$  é uma carta para  $M$  em  $\alpha(t)$ , então  $\alpha'(t) = (\alpha(t), d\alpha_t(1), i)$ . Note que de fato  $p \circ \alpha' = \alpha$ .

**Definição 3.2.1.** Um  $C^k$ -campo de vetores tangentes em  $M$  é uma  $C^k$ -seção  $X:M \rightarrow TM$ , i.e., uma função  $C^k$  com  $p(X(x)) = x$ . Uma curva integral de  $X$  é uma curva  $C^1 \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  tal que  $\alpha' = X \circ \alpha$ . O ponto  $\alpha(0)$  é chamado de condição inicial de  $\alpha$ .

**Teorema 3.2.1.** Se  $\partial M = \emptyset$ , para cada  $x \in M$ , existe uma curva integral  $\alpha_x$  de  $X$  com condição inicial  $x$  tal que qualquer outra curva integral de  $X$  com condição inicial  $x$  é uma restrição de  $\alpha_x$ .

**Dem.:** Basta usar o teorema de Picard

A curva dada pelo teorema 3.2.1 é chamada de curva integral maximal de  $X$  com condição inicial  $x$ . Definimos também as funções tempos de escape de  $X$ ,  $t^+ : M \rightarrow (0, +\infty]$ ,  $t^- : M \rightarrow [-\infty, 0)$  por exigir que  $(t^-(x), t^+(x))$  seja o domínio de  $\alpha_x$ .

**Proposição 3.2.2.** Se  $t^-(x) < s < t^+(x)$  e  $y = \alpha_x(s) \Rightarrow \alpha_x(t+s) = \alpha_y(t)$ . Em particular,  $t^-(y) = t^-(x) - s$ ,  $t^+(y) = t^+(x) - s$ .

**Proposição 3.2.3.**  $t^+$  é semicontínua superiormente e  $t^-$  inferiormente. Além disso, se  $t^+(x) < \infty$ ,  $\alpha_x(t)$  não acumula em ponto algum quando  $t \rightarrow t^+(x)$ . O mesmo ocorre se  $t^-(x) > -\infty$ .

**Corolário 3.2.3.1.** Se  $M$  é compacta  $t^+ \equiv \infty$  e  $t^- \equiv -\infty$ .

**Definição 3.2.2.** Dado um  $C^k$ -campo  $X$  de vetores tangentes a  $M$ , definimos

$$D = D(X) = \{(x, t) \in M \times \mathbb{R}; t^-(x) < t < t^+(x)\}$$

e, para cada  $t \in \mathbb{R}$

$$D_t = \{x \in M; (x, t) \in D\}$$

Defina  $\Phi : D \rightarrow M$  e  $\Phi_t : D_t \rightarrow M$  por  $\Phi(x, t) = \Phi_t(x) = \alpha_x(t)$ . O conjunto  $\{\Phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  é chamado de grupo (local) a um parâmetro gerado por  $X$ .

**Teorema 3.2.4.**  $D$  é aberto em  $M \times \mathbb{R}$  e  $\Phi$  é  $C^k$ . Para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $D_t$  é aberto em  $M$  e  $\Phi_t$  é um  $C^k$ -difeomorfismo entre  $D_t$  e  $D_{-t}$ , sendo  $\Phi_{-t}$  sua inversa. Também, se  $x \in D_t$ ,  $\Phi_t(x) \in D_s \Rightarrow x \in D_{t+s}$  e  $\Phi_{t+s}(x) = \Phi_s(\Phi_t(x))$ .

**Observação:** Todos os teoremas desta seção valem para campos de vetores  $C^{k-}$  numa variedade de Banach  $C^{k+1}$  com  $k \geq 1$ .

### 3.3 Geometria Riemanniana

Seja  $\mathbb{H}$  um espaço de Hilbert separável. Nesta seção  $M$  será uma  $\mathbb{H}$ - $C^{k+1}$ -variedade e, se  $x \in M$ ,  $\langle, \rangle_x$  será um produto interno admissível em  $M$ , ou seja, uma forma bilinear, simétrica e positiva definida em  $T_x M$  t.q.  $\|[\varphi_i^{-1}(x), u, i]\|_x = \langle [\varphi_i^{-1}(x), u, i], [\varphi_i^{-1}(x), u, i] \rangle_x^{1/2}$  define a topologia em  $T_x M$ . Sejam  $\langle, \rangle$  o produto interno de  $\mathbb{H}$  e  $(U_i, \varphi_i)$  uma carta para  $M$ . Definimos uma função  $G_i : \varphi_i(U_i) \rightarrow \mathcal{S}$  ( $\mathcal{S}$  é o espaço dos operadores bilineares, simétricos e positivos definidos em  $\mathbb{H}$ ) da seguinte maneira : se  $x = \varphi_i(y)$ ,  $\varphi'_i(y)$  é um isomorfismo de  $\mathbb{H}$  em  $T_x M$ , logo, existe um único operador positivo definido  $G_i(x)$  em  $\mathbb{H}$  com

$$\langle G_i(x)u, v \rangle = \langle [y, u, i], [y, v, i] \rangle_x \quad (3.3.1)$$

Seja  $(U_j, \varphi_j)$  outra carta em  $M$  com  $x = \varphi_j(z) \in V = \varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j) \neq \emptyset$  e tome o difeomorfismo  $h = \varphi_i^{-1} \circ \varphi_j : \varphi_j^{-1}(V) \rightarrow \varphi_i^{-1}(V)$ . Assim  $\varphi'_j(z) = \varphi'_i(y)h'(z)$  e então

$$\begin{aligned} \langle G_j(x)u, v \rangle &= \langle [y, \varphi_i^{-1'}(x)\varphi'_j(z)u, i], [y, \varphi_i^{-1'}(x)\varphi'_j(z)v, i] \rangle_x = \langle [y, h'(z)u, i], [y, h'(z)v, i] \rangle_x = \\ &= \langle G_i(x)h'(z)u, h'(z)v \rangle \end{aligned}$$

Portanto  $G_j(x) = dh_z^* G_i(x) dh_z$  e, como  $h$  é  $C^{k+1}$ ,  $G_i$  é  $C^k$  em  $V$  se, e só se  $G_j$  o for.

**Definição 3.3.1.** A aplicação  $x \mapsto \langle, \rangle_x$  é dita uma estrutura riemanniana em  $M$  se, para cada carta  $(U_i, \varphi_i)$  a função  $G_i$  for  $C^k$ . Neste caso  $M$  será chamada uma  $C^{k+1}$ -variedade riemanniana.

Dessa maneira temos definida uma função  $\|\cdot\|$  em TM dada por  $\|[y, u, i]\| = \|[y, u, i]\|_{\varphi_i(y)}$  tal que  $\|\cdot\|^2$  é  $C^k$  em TM e, consequentemente,  $\|\cdot\|$  é contínua em TM e  $C^k$  no complementar da seção nula. Assim, dada uma curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ ,  $t \mapsto \|\alpha'(t)\|$  é contínua em  $[a, b]$  e

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

está bem definido e é chamado de o comprimento de  $\alpha$ .

Dados dois pontos  $x$  e  $y$  em uma mesma componente conexa por caminhos de  $M$ , sempre existe uma curva  $C^1$  ligando um ao outro. Então podemos definir uma função  $\rho(x, y)$  em cada componente conexa por caminhos tomando o ínfimo dos comprimentos das curvas  $C^1$  ligando  $x$  a  $y$ .

**Lema 3.3.1.** Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  uma função  $C^1$ . Então

$$\int_a^b \|f'(t)\| dt \geq \|f(b) - f(a)\|$$

**Dem.:** Se  $f(a) = f(b)$  está claro. Caso contrário, seja  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  com  $g(t)(f(b) - f(a))$  seja a projeção ortogonal de  $f(t) - f(a)$  no gerado por  $f(b) - f(a)$ . Então  $g$  é  $C^1$ ,  $g(a) = 0$ ,  $g(b) = 1$  e  $f(t) - f(a) = g(t)(f(b) - f(a)) + h(t)$  onde  $h: [a, b] \rightarrow (f(b) - f(a))^\perp$  é uma aplicação  $C^1$ . Assim  $f'(t) = g'(t)(f(b) - f(a)) + h'(t)$  com  $h'(t) \perp f(b) - f(a)$ . Então

$$\|f'(t)\|^2 = |g'|^2 \|f(b) - f(a)\|^2 + \|h'(t)\|^2 \geq |g'|^2 \|f(b) - f(a)\|^2$$

e portanto

$$\int_a^b \|f'(t)\| dt \geq \|f(b) - f(a)\| \int_a^b |g'| dt \geq \|f(b) - f(a)\| \int_a^b g' dt = \|f(b) - f(a)\| (g(b) - g(a)) = \|f(b) - f(a)\|$$

□

Com isto segue trivialmente a

**Proposição 3.3.1.** A função  $\rho$  definida acima é uma métrica e define a topologia de  $M$ .

**Definição 3.3.2.** Se  $M$  é uma  $C^{k+1}$ -variedade riemanniana, a métrica  $\rho$  definida (em cada componente conexa por caminhos) acima é chamada de métrica riemanniana de  $M$ . Se com essa métrica cada componente se torna um espaço métrico completo então dizemos que  $M$  é completa.

Se  $\alpha$  é uma curva  $C^1$  em  $M$  (riemanniana) definida num intervalo aberto  $(a, b)$ , definimos o comprimento de  $\alpha$  por

$$L(\alpha) = \lim_{\substack{r \rightarrow a \\ s \rightarrow b}} \int_r^s \|\alpha'(t)\| dt$$

Se  $L(\alpha) < \infty$ , dado  $\varepsilon > 0$ , escolha  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = b$  de modo que  $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\alpha'(t)\| dt < \varepsilon$ . Assim, devido ao lema 3.3.1, a imagem de  $\alpha$  está contida na união das bolas  $B_\varepsilon(\alpha(t_i))$ , ou seja :

**Proposição 3.3.2.** Se  $\alpha$  é uma curva  $C^1$  com comprimento finito numa variedade riemanniana  $M$ , então sua imagem é um conjunto totalmente limitado na métrica de  $M$ . Em particular, se  $M$  for completa, o fecho da imagem de  $\alpha$  é compacto.

**Proposição 3.3.3.** Seja  $X$  um campo de vetores  $C^k$  em uma  $C^{k+1}$ -variedade riemanniana completa  $M$ . Considere  $\alpha : (t^-, t^+) \rightarrow M$  uma curva integral maximal de  $X$ . Se  $t^+ < \infty$  temos

$$\int_0^{t^+} \|X(\alpha(t))\| dt = \infty$$

Em particular  $\|X(\alpha(t))\|$  é ilimitada em  $[0, t^+)$ .

**Dem.:** Como  $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$  segue da proposição 3.3.2 que, se  $\int_0^{t^+} \|X(\alpha(t))\| dt < \infty$ ,  $\alpha(t)$  teria um ponto de acumulação quando  $t \rightarrow t^+$ . Mas isso contradiz a proposição 3.2.3.  $\square$

**Observação:** Evidentemente temos um resultado análogo para  $t^- > -\infty$ .

Considere agora uma função  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$   $C^{k+1}$  em uma  $C^{k+1}$ -variedade riemanniana. Para cada  $x \in M$ ,  $df_x$  pode ser olhada como um funcional linear (limitado) em  $T_x M$ , portanto, existe um único vetor  $\nabla f_x$  em  $T_x M$  com  $df_x([x, u, i]) = \langle [x, u, i], \nabla f_x \rangle_x \forall x \in T_x M$ . O vetor  $\nabla f_x$  é chamado de gradiente de  $f$  em  $x$ .

**Proposição 3.3.4.** A função  $\nabla f : M \rightarrow TM$  que leva  $x \mapsto \nabla f_x$  é um  $C^k$  campo de vetores tangentes a  $M$ .

**Dem.:** Sejam  $(U_i, \varphi_i)$  uma carta para  $M$  no espaço de Hilbert  $\mathbb{H}$  com produto interno  $\langle, \rangle$ . Defina  $g: U_i \rightarrow \mathbb{R}$  por  $g = f \circ \varphi_i$ . Então  $g': U_i \rightarrow \mathbb{H}^* \equiv \mathbb{H}$  é  $C^k$  (denote por  $T$  a identificação canônica, via teorema da representação de Riez, de  $\mathbb{H}^*$  com  $\mathbb{H}$ ). Tome  $x = \varphi_i(y) \in \varphi_i(U_i)$ . Então

$$\langle G_i(x)(d\varphi_i^{-1})_x \nabla f_x, v \rangle = \langle \nabla f_x, [y, v, i] \rangle_x = df_x([y, v, i]) = g'(y)v = \langle Tg'(y), v \rangle$$

Então  $(d\varphi_i^{-1})_x \nabla f_x = G_i(x)^{-1}(Tg'(y))$  de onde segue que a aplicação  $x \mapsto (d\varphi_i^{-1})_x \nabla f_x$  de  $\varphi_i(U_i)$  em  $\mathbb{H}$  é  $C^k$ , i.e.,  $\nabla f$  é um  $C^k$ -campo de vetores em  $M$ .  $\square$

**Observação:** É claro que  $\nabla f_x = 0 \Leftrightarrow x$  é ponto crítico de  $f$ , ou seja, o conjunto dos pontos críticos de  $f$  é o conjunto de zeros da função  $\|\nabla f\|$ . Além disso,

$$(\nabla f)f(x) := df_x(\nabla f_x) = \langle \nabla f_x, \nabla f_x \rangle_x = \|\nabla f_x\|^2$$

portanto  $(\nabla f)f$  é estritamente positiva fora do conjunto dos pontos críticos de  $f$ .

### 3.4 Pontos Críticos : Primeiros Resultados

**Definição 3.4.1.** Dizemos que um subespaço  $\mathbb{E}_1$  separa um espaço de Banach  $\mathbb{E}$  se existir  $\mathbb{E}_2$  tal que  $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2$

Considere  $f: M \rightarrow N$  uma função de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ .

**Definição 3.4.2.** Se  $df_{x_0}$  for injetiva e  $\mathcal{Im}(df_{x_0})$  separar  $T_{f(x_0)}N$  diremos que  $f$  é uma imersão em  $x_0$ . Se  $df_{x_0}$  for sobrejetiva e  $\text{Ker}(df_{x_0})$  separar  $T_{x_0}M$   $f$  será dita uma submersão em  $x_0$ . Diremos que  $f$  é uma imersão ou submersão se o for em todos os pontos de  $M$ .



**Definição 3.4.3.** Se  $f$  for uma imersão e um homeomorfismo sobre sua imagem diremos que  $f$  é um mergulho (de  $M$  em  $N$ ). Um mergulho sobrejetivo será chamado de difeomorfismo.

**Definição 3.4.4.**  $(S, \mathcal{F})$  é dita uma subvariedade de  $M$  se  $S \subset M$  e  $\mathcal{F}$  for uma  $C^k$ -estrutura diferenciável na qual a inclusão é um mergulho.

**Definição 3.4.5.** Um ponto  $x_0 \in M$  será dito ponto regular de  $f$  se  $f$  for uma submersão em  $x_0$ . Caso contrário  $x_0$  é um ponto crítico de  $f$ . Um ponto  $y_0 \in N$  será chamado de valor regular de  $f$  se  $f^{-1}(y_0)$  só possuir pontos regulares. Novamente, se  $y_0$  não for regular será dito valor crítico.

**Teorema 3.4.1.** Sejam  $M$  e  $N$   $C^k$ -variedades (sem bordo), se  $f: M \rightarrow N$  é  $C^k, k > 0$ , e  $y_0 \in N$  é valor regular de  $f \Rightarrow f^{-1}(y_0)$  é subvariedade de  $M$ .

**Dem.:** Basta proceder como no caso de dimensão finita, haja vista que já temos feito o teorema da função implícita.

Consideremos agora funções do tipo  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $M$  é uma  $E$ - $C^1$ -variedade. Se  $f$  for  $C^2$ , existe uma dicotomia dos seus pontos críticos.

**Lema 3.4.1.** Seja  $h: U \rightarrow V$  um difeomorfismo  $C^k, k \geq 2$ , entre os abertos  $U$  e  $V$  dos espaços de Banach  $E$  e  $F$  e considere uma função  $C^2$   $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ . Tome  $g = f \circ h: U \rightarrow \mathbb{R}$ , então :

$$dg_x = 0 \quad \Rightarrow \quad d^2g_x(u_1, u_2) = d^2f_{h(x)}(dh_x(u_1), dh_x(u_2))$$

**Dem.:** Pela regra da cadeia temos

$$dg_x = df_{h(x)}dh_x$$

e

$$d^2g_x(u_1, u_2) = d^2f_{h(x)}(dh_x(u_1), dh_x(u_2)) + df_{h(x)}(d^2h_x(u_1, u_2))$$

Da primeira equação tiramos que  $df_{h(x)} = 0$  pois  $dh_x$  é um isomorfismo. Com isso, a segunda equação nos fornece o resultado. □

**Proposição 3.4.2.** Seja  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $M$  é uma  $E$ - $C^2$ -variedade. Se  $f$  for  $C^2$ , e  $x$  for um ponto crítico de  $f$ , temos unicamente definida uma forma bilinear, contínua e simétrica em  $T_x M$ , chamada a hessiana de  $f$  em  $x$  e denotada por  $H(f)_x$ , com a seguinte propriedade : se  $(U_i, \varphi)$  é uma carta em  $x = \varphi_i(y)$  então

$$H(f)_x([y, u, i], [y, v, i]) = d^2(f \circ \varphi_i)_y(u, v)$$

**Dem.:** Direto do lema 3.4.1

**Definição 3.4.6.** Se  $f \in C^2(M, \mathbb{R})$ , onde  $M$  é  $C^2$ , e  $x$  é um ponto crítico de  $f$ , dizemos que  $x$  é um ponto crítico degenerado ou não degenerado de acordo com  $H(f)_x$  ser ou não degenerada. O índice (e coíndice) de um ponto crítico também é definido como o índice (e coíndice) da hessiana no ponto.

Vamos agora aos primeiros resultados importantes da teoria dos pontos críticos.

**Lema 3.4.2. (Morse)** : Seja  $f: U \subset \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^1$  definida numa vizinhança aberta da origem num espaço de Hilbert. Suponha que 0 seja um ponto crítico não degenerado onde  $f$  seja duas vezes diferenciável e  $f(0)=0$ . Então existe um difeomorfismo  $C^1(1)$ ,  $\varphi: V \subset U \rightarrow W \subset \mathbb{H}$  com  $0 \in V$  aberto e

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{e} \quad d\varphi_0 = I \quad (3.4.1)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} d^2 f_0(\varphi(x), \varphi(x)) \quad \forall x \in V \quad (3.4.2)$$

**Dem.:** Seja  $A$  a aplicação linear simétrica associada a  $\frac{1}{2} d^2 f_0$ , i.e.,  $\langle Au, v \rangle = \frac{1}{2} d^2 f_0(u, v)$ . Defina então  $g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $g(u) = \langle Au, u \rangle$ . Defina o seguinte campo de vetores em  $\mathbb{H} - \{0\}$

$$X(u) = \frac{Au}{2\|Au\|^2}$$

e seja  $\alpha_x(t)$  sua curva integral maximal com condição inicial  $x$ .

Dessa maneira temos  $g'(\alpha_x(t)) \equiv 1 \Rightarrow g(\alpha_x(t)) = g(x) + t$ . Por outro lado,

$$\frac{d}{ds} |t(\|\alpha_x(s)\|^2) = 2 \langle X(\alpha_x(t)), \alpha_x(t) \rangle$$

e então

$$\left| \|\alpha_x(t)\|^2 - \|x\|^2 \right| \leq \int_0^{|t|} \frac{\|\alpha_x(s)\|}{\|A\alpha_x(s)\|} ds \leq k|t|$$

onde  $k > 0$  é tal que  $\frac{\|Au\|}{\|u\|} \geq k^{-1}$  (veja que  $A$  é um isomorfismo contínuo de  $\mathbb{H}$  em  $\mathbb{H}$ ).

Pelo teorema de Taylor temos  $f(x) = \langle Ax, x \rangle + r(x)$  sendo que, para algum  $\delta > 0$ ,  $|r(x)| \leq \frac{1}{2k} \|x\|^2$  se  $\|x\| \leq \delta$ . Logo, se  $|t| \leq |r(x)|$ , temos

$$\|\alpha_x(t)\|^2 \geq \frac{1}{2} \|x\|^2 \quad (3.4.3)$$

Em particular  $t^-(x) \leq r(x) \leq t^+(x)$ . De fato, se fosse, por exemplo,  $t^+(x) < |r(x)| < \infty$ , dado  $0 < t < t^+$ , teríamos

$$\int_0^t \|X(\alpha_x(s))\| ds = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{ds}{\|A\alpha_x(s)\|} = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\|\alpha_x(s)\| ds}{\|A\alpha_x(s)\| \|\alpha_x(s)\|} \leq \frac{\sqrt{2} kt}{2 \|x\|}$$

e portanto

$$\int_0^{t^+} \|X(\alpha_x(s))\| ds = \lim_{t \rightarrow t^+} \int_0^t \|X(\alpha_x(s))\| ds \leq \frac{\sqrt{2} kt^+}{2 \|x\|} < \infty$$

contradizendo a proposição 3.3.3

Sendo assim definimos  $\varphi(x) = \begin{cases} \alpha_x(r(x)) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ . Pelo teorema 3.2.4,  $\varphi$  é  $C^1$  fora da origem.

Mais ainda,

$$g(\varphi(x)) = g(\alpha_x(r(x))) = g(x) + r(x) = f(x)$$

---

<sup>1</sup>Se  $f$  for  $C^2$  então  $\varphi$  será  $C^2$ .

Provemos agora que  $d\varphi_0 = I$ . De fato,

$$\|\varphi(x) - x\| \leq \int_0^{|r(x)|} \|\alpha'_x(t)\| dt = \frac{1}{2} \int_0^{|r(x)|} \|A\alpha_x(t)\|^{-1} dt \leq \frac{k}{2} \int_0^{|r(x)|} \|\alpha_x(t)\|^{-1} dt \leq \frac{kr(x)}{\sqrt{2}\|x\|}$$

(na última desigualdade usamos a equação (3.4.3)). Mas então,  $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|\varphi(x) - x\|}{\|x\|} = 0$ , como queríamos.

Resta mostrar a continuidade de  $\varphi'$  em 0. Para tanto, consideremos  $\alpha(t, x) = \alpha_x(t)$  o fluxo de  $X$ , mais particularmente, olhemos para as derivadas parciais  $d_1\alpha_{(t,x)}, d_2\alpha_{(t,x)}$ . Assim, definindo  $\gamma_x(t) = d_2\alpha_{(t,x)}$ ,  $\gamma_x(t)$  é a solução da equação (veja [23])

$$\gamma'_x(t) = dX_{\alpha(t,x)} \circ \gamma_x(t), \quad \gamma_x(0) = I$$

e então

$$\|\gamma_x(t)\| \leq 1 + \int_0^{|t|} \|dX_{\alpha(s,x)}\| \|\gamma_x(s)\| ds$$

Agora, temos  $\|dX_u\| \leq c\|u\|^{-2}$  para algum  $c > 0$  (apenas derive  $X$  para achar  $c$ ), então podemos usar a desigualdade de Gronwall para obter

$$\|\gamma_x(t)\| \leq \exp\left(c \int_0^{|t|} \|\alpha_x(s)\|^{-2} ds\right) \leq \exp\left(\frac{2c|t|}{\|x\|^2}\right)$$

e, portanto,  $\|\gamma_x(r(x))\| \rightarrow 1$  quando  $\|x\| \rightarrow 0$ .

Finalmente calculamos

$$\|d\varphi_x - I\| = \|d_1\alpha_{(r(x),x)}dr_x + d_2\alpha_{(r(x),x)} - I\| \leq \|d_1\alpha_{(r(x),x)}\| \|dr_x\| + \|\gamma_x(r(x)) - I\|$$

Usando a equação (3.4.3) novamente vemos que a primeira parcela da soma acima vai a 0 quando  $x \rightarrow 0$ . Vejamos a segunda :

$$\|\gamma_x(r(x)) - I\| \leq \int_0^{|r(x)|} \|X'(\alpha(t,x))\| \|\gamma_x(t)\| dt \leq c \int_0^{|r(x)|} \frac{\|\gamma_x(t)\|}{\|\alpha_x(t)\|^2} dt$$

Como  $\|\gamma_x(r(x))\|$  é limitada, (3.4.3) também nos diz que esta parcela vai a zero quando  $x \rightarrow 0$ . Agora é só usar o teorema da função inversa para ver que  $\varphi$  é um difeomorfismo local  $C^1$ .

□

**Observação:** Veja que 0 é um ponto crítico isolado de  $f$ . De fato, em  $V$  temos  $df_x u = 2 \langle Ad\varphi_x u, \varphi(x) \rangle \Rightarrow df_x \neq 0$ . De maneira mais geral temos :

**Corolário 3.4.2.1.** Os pontos críticos não degenerados de uma função real  $C^1$  definida numa variedade riemanniana  $C^1$  tal que, se  $x_0$  é ponto crítico de  $f$ , então existe  $f''(x_0)$ , são isolados.

**Observação:** Classicamente a teoria de Morse foi desenvolvida em dimensão finita com funções pelo menos  $C^2$  (veja [14] por exemplo). Posteriormente Palais e Smale estenderam os resultados para dimensão infinita ([1, 4]), mas mantiveram as hipóteses de diferenciabilidade. Esta versão do lema de Morse, que possibilita o desenvolvimento da teoria de Morse (capítulo 4) com hipóteses mais fracas de diferenciabilidade, é devida a Mercuri e Palmieri ([9]). As razões para querermos uma teoria de Morse com hipóteses de diferenciabilidade mais fracas ficará clara no capítulo 6.

Seguindo ainda as hipóteses do lema de Morse, se 0 for um ponto crítico não degenerado, pela decomposição espectral de A, obtemos uma decomposição de  $\mathbb{H}$

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_- \oplus \mathbb{H}_+$$

por subespaços A-invariantes com A negativa em  $\mathbb{H}_-$  e positiva em  $\mathbb{H}_+$ . Então seja  $P: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}_-$  a projeção ortogonal e considere

$$\psi = |A|^{1/2} \circ \varphi$$

onde  $|A|(u_- + u_+) = -Au_- + Au_+$  e  $|A|^{1/2}$  é o único operador (positivo)  $B: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  tal que  $B \circ B = B^2 = |A|$  (Veja em [22] um tratamento para estes fatos). Dessa maneira f assume a forma

$$f(x) = \|(I - P)\psi(x)\|^2 - \|P\psi(x)\|^2 \quad (3.4.4)$$

e o índice de f em 0 é a dimensão de  $\mathbb{H}_-$ .

**Observação:** Veja em [9] os problemas que ocorrem para se falar no lema de Morse em espaços de Banach e em [19] alguns resultados da teoria de Morse que podem ser recuperados para variedades modeladas em espaços de Banach.

**Teorema 3.4.3. ( Forma canônica para pontos regulares ) :** Seja f uma função  $C^k, k > 0$ , a valores reais definida numa vizinhança U da origem de um espaço de Banach  $\mathbb{E}$ . Suponha que  $f(0)=0$  e que 0 seja um ponto regular de f. Então existe  $l \in \mathbb{E}^*, l \neq 0$ , e um difeomorfismo  $C^k$  h de uma vizinhança de 0 em  $\mathbb{E}$  com  $h(0)=0$  e  $f(h(x))=l(x)$ .

**Dem.:** Tome  $l = df_0 \neq 0$  e escolha  $x_0 \in \mathbb{E}$  t.q.  $l(x_0) = 1$ . Seja N o  $\text{Ker}(l)$  e defina  $T: \mathbb{E} \rightarrow N \times \mathbb{R}$  por  $T(x) = (x - l(x)x_0, l(x))$ . Assim, T é um isomorfismo linear entre  $\mathbb{E}$  e  $N \times \mathbb{R}$ . Considere  $g: U \rightarrow N \times \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = (x - l(x)x_0, f(x))$ . Então g é  $C^k$  e  $dg_y(x) = (x - l(x)x_0, df_y(x))$ , em particular,  $dg_0 = T$ , logo, pelo teorema da função inversa,  $h = g^{-1} \circ T$  é um difeomorfismo  $C^k$  de uma vizinhança de 0 em  $\mathbb{E}$  com  $h(0)=0$ . Agora  $(h(x) - l(h(x))x_0, f(h(x))) = g(h(x)) = T(x) = (x - l(x)x_0, l(x))$ , ou seja,  $f(h(x)) = l(x)$ . □

**Corolário 3.4.3.1. ( Suavidade para pontos regulares ) :** Se f é uma função real  $C^k$  definida numa variedade de Banach M  $C^k$  e a é um valor regular de f tal que  $f^{-1}(a)$  não tem interseção com o bordo de M, então  $M_a = \{x \in M; f(x) \leq a\}$  é uma  $C^k$ -subvariedade fechada de M e  $\partial M_a = (M_a \cap \partial M) \cup (f^{-1}(a))$  (união disjunta).

**Observação:**  $M_a = M_a(f)$  é chamada de subvariedade de subnível a.

### 3.5 Transversalidade Forte

Considere uma  $C^{k+1}$ -variedade,  $k > 0$ , M (sem bordo) e X um campo de vetores tangentes a M de classe  $C^k$ , com grupo (local) a um parâmetro  $\Phi_t$ . Se f é uma função  $C^k$  a valores reais em M, definimos uma função  $Xf: M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$Xf(p) = df_p(X_p) \quad (3.5.1)$$

**Proposição 3.5.1.** Suponha que  $Xf \equiv 1$ ,  $f(M) = (-\varepsilon, \varepsilon)$  e que  $\Phi_t(x)$  está definida para  $|t + f(x)| < \varepsilon$ . Então,  $W = f^{-1}(0)$  é uma  $C^k$ -subvariedade fechada de  $M$  e a função  $F: W \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  dada por  $F(w, t) = \Phi_t(w)$  é um difeomorfismo  $C^k$  tal que, para cada  $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $F$  leva  $W \times \{t_0\}$   $C^k$ -difeomorficamente em  $f^{-1}(t_0)$ .

**Dem.:** A condição  $Xf \equiv 1$  diz que todo  $s \in \mathbb{R}$  é valor regular de  $f$ , logo  $f^{-1}(s)$  é  $C^k$ -subvariedade fechada de  $M$ . Observe que se definirmos  $h(t) = f(\Phi_t(x_0)) = f(\alpha_{x_0}(t))$  para algum  $x_0 \in M$ , teremos

$$h'(t) = df_{\alpha_{x_0}(t)}(\alpha'(t)) = df_{\alpha_{x_0}(t)}(X_{\alpha'(t)}) = Xf(\Phi_t(x_0))$$

e, portanto,

$$f(\Phi_t(x_0)) = f(x_0) + t$$

Logo, se tivermos  $F(w, t) = F(w', t')$  obtemos

$$t = f(w) + t = f(\Phi_t(w)) = f(\Phi_{t'}(w')) = f(w') + t' = t'$$

então,  $\Phi_t(w) = \Phi_t(w')$  e, como  $\Phi_t$  é injetiva,  $w = w'$ , i.e.,  $F$  é injetiva.

Por outro lado, se  $x \in M$ ,  $|-f(x) + f(x)| < \varepsilon \Rightarrow w = \Phi_{-f(x)}(x)$  está bem definida e temos  $f(w) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow w \in W$ . Mais ainda,  $F(w, f(x)) = \Phi_{f(x)}(\Phi_{-f(x)}(x)) = x$ , ou seja,  $F$  é sobrejetiva.

Além do mais,  $F^{-1}(x) = (\Phi_{-f(x)}(x), f(x))$  é uma função  $C^k$  de  $M$  em  $W \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  (teorema 3.2.4). Agora, como  $f(F(w, t_0)) = f(\Phi_{t_0}(w)) = f(w) + t_0 = t_0$ , a última parte da proposição segue.  $\square$

**Definição 3.5.1.** Seja  $M$  uma  $C^{k+1}$ -variedade (sem bordo),  $k > 0$ . Um campo  $C^k$  de vetores tangentes a  $M$  é dito  $C^k$ -fortemente transversal a uma função  $C^k$   $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  em um intervalo  $[a, b]$ , se para algum  $\delta > 0$ , as condições seguintes são satisfeitas para  $V = f^{-1}(a - \delta, b + \delta)$

1.  $Xf$  é  $C^k$  e não se anula em  $V$
2. Se  $\alpha_x$  é a curva integral maximal de  $x \in V$ , então  $\alpha_x(t) \notin V$  para algum  $t$  positivo no domínio de  $\alpha_x$  e também para algum  $t$  negativo.

O conjunto  $V$  acima é uma subvariedade aberta de  $M$  e  $Y = X/Xf$  é um campo de vetores tangentes a  $M$  definido em  $V$ . Mais ainda,  $Yf$  é identicamente 1 em  $V$  de maneira que as curvas integrais de  $Y$  são as curvas integrais de  $X$  reparametrizadas. Dessa forma, se  $\psi_t$  é o grupo (local) a um parâmetro gerado por  $Y$  em  $V$ , a condição (2) diz que  $\psi_t(x)$  está definido para  $a - \delta < f(x) + t < b + \delta$ .

Se definirmos

$$g = f|_V - \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad \varepsilon = \frac{b-a}{2} + \delta$$

vemos que a trinca  $(V, g, Y)$  satisfaz as hipóteses feitas para  $(M, f, X)$  na proposição 3.5.1, o que nos leva ao

**Teorema 3.5.2. (Transversalidade Forte)** Seja  $f$  uma função a valores reais de classe  $C^k$ ,  $k > 0$ , definida numa  $C^{k+1}$ -variedade (sem bordo)  $M$ . Se existir um  $C^k$  campo de vetores tangentes a  $M$  que é  $C^k$  fortemente transversal a  $f$  num intervalo  $[a, b]$ , então  $W = f^{-1}(a)$  é  $C^k$ -subvariedade fechada

de  $M$  e, para algum  $\delta > 0$ , existe um difeomorfismo  $C^k F: W \times (a - \delta, b + \delta) \rightarrow N \subset M$ , onde  $N$  é uma subvariedade aberta de  $M$ , e tal que  $F$  leve  $W \times f^{-1}(c)$   $C^k$ -difeomorficamente em  $f^{-1}(c)$  para todo  $c \in (a - \delta, b + \delta)$ . Em particular,  $f^{-1}([a, b])$  é  $C^k$  difeomorfo a  $W \times [a, b]$ .

**Corolário 3.5.2.1.** Existe uma função  $C^k H: M \times [0, 1] \rightarrow M$  tal que, se denotarmos  $H_s(x) = H(x, s)$ , temos

1.  $H_s$  é um  $C^k$  autodifeomorfismo  $\forall s \in [0, 1]$
2.  $H_s(x) = x$  se  $x \in f^{-1}(a - \delta/2, b + \delta/2)$
3.  $H_0$  é a identidade
4.  $H_1(f^{-1}(-\infty, a]) = f^{-1}((-\infty, b])$

**Dem.:** Considere uma função estritamente crescente,  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfazendo  $h(t) = t$  sempre que  $t \notin f^{-1}(a - \delta/2, b + \delta/2)$  e  $h(a) = b$ . no complementar de  $f^{-1}(a - \delta/2, b + \delta/2)$  defina  $H_s$  como a identidade e, em  $f^{-1}(a - \delta, b + \delta)$ , usando a relação  $H_s(F(y, t)) = F(y, (1 - s)t + s h(t))$ . □

### 3.6 Partições da Unidade

Nesta seção estudaremos a existência de partições da unidade e notaremos algumas diferenças entre variedades modeladas em espaços de Hilbert e de Banach.

**Definição 3.6.1.** Uma  $C^r$  partição da unidade em uma  $\mathbb{E}$ - $C^k$  variedade  $M$  é uma família de abertos e funções,  $\{(A_\alpha, \phi_\alpha); \alpha \in \mathbb{A}\}$ , sendo que  $\phi_\alpha: A_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^+$  são  $C^r$  e satisfazem

1.  $\{A_\alpha\}$  é cobertura de  $M$  localmente finita.
2.  $\text{supp}(\phi_\alpha) \subset A_\alpha$  ( $\text{supp}(\phi_\alpha)$  denota o suporte de  $\phi_\alpha$ ).
3. Para cada  $x \in M$  temos  $\sum_\alpha \phi_\alpha(x) = 1$  (observe que a soma é finita).

Se  $\{B_\beta, \beta \in \mathbb{B}\}$  é uma cobertura aberta de  $M$ , dizemos que  $\{(A_\alpha, \phi_\alpha)\}$  é dominada por  $\{B_\beta\}$  se existir função  $i: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$  t.q.  $A_\alpha \subset B_{i(\alpha)}$ . Diremos que um espaço de Banach ou uma variedade modelada num espaço de Banach admite partição da unidade se para toda cobertura aberta existir partição da unidade dominada por ela.

Dizemos que um espaço de Banach  $\mathbb{E}$  é  $C^r$  suave se existir função não identicamente nula em  $C^r(\mathbb{E}, \mathbb{R}^+)$  com  $B_1(0) = f^{-1}((0, \infty))$ .

**Teorema 3.6.1.** Se  $\mathbb{E}$  é um espaço de Banach então  $\mathbb{E}$  admite partição da unidade de classe  $C^k \Leftrightarrow \mathbb{E}$  é  $C^k$  suave.

**Dem.:**  $\Rightarrow$  é óbvio. Reciprocamente, dada uma cobertura aberta  $\{A_\alpha\}$ , podemos obter cobertura localmente finita  $\{O_\beta\}$  de  $\mathbb{E}$  que refina  $\{A_\alpha\}$  e tal que, se  $U$  for aberto em algum  $O_\beta$  existe  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^+, C^k$  com  $U = f^{-1}((0, \infty))$ . Como  $\mathbb{E}$  é normal (pois é métrico) podemos refinar mais

uma vez  $\{A_\alpha\}$  a uma cobertura aberta  $\{U_\beta\}$  com  $\overline{U_\beta} \subset O_\beta$ . Assim podemos considerar funções  $C^k f_\beta : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$  sendo  $U_\beta = f_\beta^{-1}((0, \infty))$ . Defina então  $\phi_\beta = \frac{f_\beta}{\sum f_\beta}$ .  $\square$

Também estaremos interessados na existência de partições da unidade  $C^{1-}$  em uma variedade de Banach  $C^1$ . Usaremos o lema

**Lema 3.6.1.** Seja  $M$  uma  $\mathbb{E}$ - $C^1$ -variedade de Banach e  $O \subset M$  aberto contido em alguma carta, i.e., existe uma carta  $(\varphi_i, U_i)$  com  $O \subset \varphi_i(U_i)$ . Então existe uma função  $C^{1-} f: M \rightarrow \mathbb{R}^+$  com  $O = f^{-1}((0, \infty))$ .

**Dem.:** É suficiente mostrarmos que existe tal  $f$  para  $M=\mathbb{E}$  e  $O \subset \mathbb{E}$ . Defina  $f(x)$  como sendo o  $\inf\{\|x - y\|; y \notin O\}$ . Como  $O$  é aberto segue que  $O = f^{-1}((0, \infty))$ . Dados  $x_1, x_2 \in O$  e  $\varepsilon > 0$ , tome  $y \notin O$  t.q.  $\|x_2 - y\| < f(x_2) + \varepsilon$ . Então  $f(x_1) \leq \|x_1 - y\| \leq \|x_1 - x_2\| + \|x_2 - y\| \leq \|x_1 - x_2\| + f(x_2) + \varepsilon$ . Sendo  $\varepsilon$  qualquer obtemos  $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$ .  $\square$

**Teorema 3.6.2.** Se  $M$  é uma variedade de Banach  $C^1$  e paracompacta, dada uma cobertura aberta  $\{A_\alpha\}$  existe uma  $C^{1-}$  partição da unidade dominada por  $\{A_\alpha\}$ .

**Dem.:** Basta repetir a demonstração do teorema 3.6.1 notando que  $M$  é normal já que é paracompacta.

### 3.7 Operadores de Fredholm e o Teorema de Sard-Smale

Como vimos na seção 3.6 muitos teoremas que temos para o caso de dimensão finita não têm um correspondente exato no caso de espaços de Banach em geral. A classe de funções de Fredholm, que veremos nesta seção, é uma classe de funções onde conseguimos manter muitos dos teoremas válidos para dimensão finita. Antes, vejamos que o teorema de Sard para dimensão finita falha no caso de dimensão infinita.

**Teorema 3.7.1. (Sard) :** Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função  $C^r, r \geq \sup\{n - m, 1\}$ . Então, o conjunto  $C = \{F(x); x \text{ é ponto crítico de } F\} \subset \mathbb{R}^m$  tem medida de Lebesgue nula.

**Exemplo 3.7.1.** Considere

$$L^\infty = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; \exists A_f \subset [0, 1] \text{ de medida nula e constante } k_{A_f} \text{ t.q. } |f(t)| \leq k \text{ se } t \notin A_f\}$$

A norma  $\|f\| = \sup_{A_f} k_{A_f}$  faz de  $L^\infty$  um espaço de Banach.

Tome  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $C^\infty$  tal que  $\alpha(t) \leq 0$  se  $t \leq 0$  e  $\alpha(t) \geq 1$  se  $t \geq 1$ . Definamos uma função  $F: L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$F(f) = \int_0^1 \alpha \circ f$$

Veja que  $F$  é diferenciável segundo Gateaux :

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(f + sh) - F(f)}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{\alpha(f + sh) - \alpha(f)}{s} = \\ \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{\alpha(f) + \alpha'(f)sh + r(sh) - \alpha(f)}{s} &= \int_0^1 \alpha'(f)h \end{aligned}$$

Ou seja,  $F'_G(f)h = \int_0^1 \alpha'(f)h$ . Observe também que  $F'_G : L^\infty \rightarrow \mathcal{L}(L^\infty, \mathbb{R})$  é contínua, logo  $F$  é diferenciável e

$$F'(f)h = \int_0^1 \alpha'(f)h$$

Considere agora a função  $\varphi_s(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t \leq s \\ 0, & \text{se } s < t \leq 1 \end{cases}$ . Claramente  $\varphi_s \in L^\infty$ . Além disso  $F'(\varphi_s) = 0$  e  $F(\varphi_s) = s$ . Logo, a imagem dos pontos críticos de  $F$  não tem medida nula.

**Definição 3.7.1.** Um subconjunto  $B \subset \mathbb{F}$  (Banach) é dito relativamente compacto se o fecho de  $B$  for compacto.

**Lema 3.7.1.**  $B \subset \mathbb{F}$  (Banach) é relativamente compacto se, e só se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existirem finitos pontos  $\{y_1, \dots, y_n\} \subset B$  tal que as bolas  $B_\varepsilon(y_i)$  cobrem  $B$  (ou seja, se  $B$  é totalmente limitado).

**Definição 3.7.2.** Dados dois espaços de Banach  $\mathbb{E}$  e  $\mathbb{F}$ , um operador linear  $T: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  é dito compacto se a imagem de conjuntos limitados de  $\mathbb{E}$  por  $T$  for relativamente compacta.

**Lema 3.7.2.** Um operador linear  $T: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  é compacto  $\Leftrightarrow T(S^\mathbb{E})$  for relativamente compacto, onde  $S^\mathbb{E} = \{x; \|x\|_\mathbb{E} = 1\}$ .

**Proposição 3.7.2.** Seja  $K(\mathbb{E}, \mathbb{F})$  o subespaço de  $L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$  formado pelos operadores compactos.  $K(\mathbb{E}, \mathbb{F})$  é fechado.

**Dem.:** Tome  $F \in \overline{K(\mathbb{E}, \mathbb{F})}$  e  $r > 0$ . Escolha  $T \in K(\mathbb{E}, \mathbb{F})$  t.q.  $\|F - T\| \leq r/2$ . Então  $T(S^\mathbb{E})$  pode ser coberta por bolas  $B_{r/2}(y_i), y_i \in T(S^\mathbb{E})$ . Assim, se  $x \in S^\mathbb{E}$  valem

$$\|F(x) - T(x)\| < r/2 \quad \text{e} \quad \|T(x) - y_i\| < r/2 \quad \text{para algum } i$$

Logo,  $\|F(x) - y_i\| < r \Rightarrow T(S^\mathbb{E})$  pode ser coberta pelas bolas  $B_r(Y_i) \Rightarrow F$  é compacto. □

**Proposição 3.7.3.** Se  $T: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  é compacto,  $T^*: \mathbb{F}' \rightarrow \mathbb{E}'$ , o operador adjunto, é compacto.

**Dem.:** Sendo  $T$  compacto, dado  $\varepsilon > 0$ , existem finitos  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset S^\mathbb{E}$  t.q.  $\{B_{T(x_i)}(\varepsilon/3)\}$  cobre  $T(S^\mathbb{E})$ , ou seja, para todo  $x \in S^\mathbb{E}$  existe  $i$  t.q.  $\|Tx - Tx_i\| < \varepsilon/3$ .

Defina  $A: \mathbb{F}' \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$A(f) = (f(Tx_1), \dots, f(Tx_n))$$

$A$  é compacto e, então, existem  $\{f_1, \dots, f_m\} \subset S^{\mathbb{F}'}$  t.q.  $\{B_{A(f_j)}(\varepsilon/3)\}$  cobre  $A(S^{\mathbb{F}'})$ . Logo, se  $f \in S^{\mathbb{F}'}$ , existe  $j$  tal que

$$|f(Tx_i) - f_j(Tx_i)| < \varepsilon/3 \quad \forall i$$

Portanto, se  $x \in S^\mathbb{E}, f \in S^{\mathbb{F}'}$ , existem  $i, j$  tais que

$$|T^*(f)(x) - T^*(f_j)(x)| < |f(Tx) - f(Tx_i)| + |f(Tx_i) - f_j(Tx_i)| + |f_j(Tx_i) - f_j(Tx)| < \varepsilon$$

ou seja, as bolas  $B_{T^*(f_j)}(\varepsilon)$  cobrem  $T^*(S^{\mathbb{F}'})$ . □

**Observação:** Veja que não precisamos da completude dos espaços na demonstração. A recíproca também é verdadeira, para uma demonstração veja [21].



**Definição 3.7.3.** Um operador linear  $F: E \rightarrow F$  contínuo entre espaços de Banach é dito um operador de Fredholm se

1. O núcleo de  $F$  tiver dimensão finita.
2. A imagem de  $F$  tiver codimensão finita.

O inteiro

$$i_F(F) = \dim(\text{Ker} F) - \text{codim}(\text{Im} F)$$

é chamado de índice de Fredholm de  $F$ .

**Observação:** A imagem de um operador de Fredholm é fechada em  $F$  pela condição 2.

**Lema 3.7.3.**  $B$  é relativamente compacto se, e só se, toda sequência em  $B$  possui subsequência convergente (para algum ponto do fecho de  $B$ ). Logo, se  $I: E \rightarrow E$  for compacta,  $E$  tem dimensão finita.

**Teorema 3.7.4.** Se  $T: E \rightarrow E$  é compacto então  $I-T$  é de Fredholm.

**Dem.:**  $I|_{\text{Ker}(I-T)}: \text{Ker}(I-T) \rightarrow \text{Ker}(I-T)$  coincide com  $T$ , logo é compacta (a restrição)  $\Rightarrow \text{Ker}(I-T)$  tem dimensão finita.

Dessa forma temos que  $E = \text{Ker}(I-T) \oplus G$ , com  $G$  fechado. Para mostrarmos que  $\text{Im}(I-T)$  é fechada basta que  $(I-T)|_G(G)$  seja fechada (já que  $(I-T)|_G$  é injetiva). Para tanto, mostremos que  $(I-T)^{-1}: (I-T)(G) \rightarrow G$  é contínua. Suponha que existisse sequência  $\{x_n\}$  t.q.  $(I-T)x_n \rightarrow 0$ , mas  $x_n$  não converge para 0. Passando a uma subsequência se necessário, existe  $\varepsilon > 0$  t.q.  $\|x_n\| > \varepsilon$ . Então  $(I-T)\frac{x_n}{\|x_n\|} \rightarrow 0$  e, como  $T$  é compacto,  $T\frac{x_n}{\|x_n\|}$  possui subsequência convergente. Logo, a sequência  $\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\}$  possui subsequência convergindo para  $x \in G$  com  $\|x\| = 1$ . Mas isto é um absurdo pois seria  $x = Tx \Rightarrow x \in \text{Ker}(I-T) \cap G = \{0\}$ .

Suponha por absurdo que  $\text{Im}(I-T)$  não tem codimensão finita. Então existem subespaços

$$(I-T)(E) = E_0 \subset \dots \subset E_n \subset \dots$$

com  $E_i$  fechado e de codimensão 1 em  $E_{i+1}$ . Então, existe sequência  $\{x_n\}$  t.q.  $\|x_i\| = 1, x_i \in E_i$  e com  $d(x_i, E_{i-1}) > 1/2$ . Assim, se  $m < n$  temos

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|x_n - (I-T)x_n - x_m + (I-T)x_m\| > 1/2$$

Logo  $\{Tx_n\}$  não possui subsequência convergente, contradição com o fato de  $T$  ser compacto (lema 3.7.3). □

**Notação:** Chamaremos de  $\text{Fred}(E, F)$  o subespaço de  $L(E, F)$  formado pelos operadores de Fredholm.

Se  $F$  é um operador de Fredholm e denotamos por  $N$  o seu núcleo e por  $R$  sua imagem. Então podemos escrever  $E = N \oplus E_0$  e  $F = R \oplus F_0$ , onde  $E_0$  e  $F_0$  são os complementos topológicos de  $N$  e  $R$  respectivamente, além disso  $\dim(F_0) = \text{codim}(R)$ .

**Lema 3.7.4.** Seja  $M \subset E$  de dimensão finita e  $M_0$  complementar topológico de  $M$ . A aplicação

$$P: E \rightarrow E \text{ dada por } Px = \begin{cases} x, & \text{se } x \in M \\ 0, & \text{se } x \in M_0 \end{cases} \text{ é linear e contínua.}$$

**Dem.:** A linearidade é trivial e a continuidade segue da desigualdade triangular. □

Dessa forma temos o seguinte resultado

**Proposição 3.7.5.** Sejam  $F \in \text{Fred}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$  e  $N, R, \mathbb{E}_0, \mathbb{F}_0$  como acima. Então existe  $F_0 : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$  linear e contínuo com

1.  $\text{Ker}(F_0) = \mathbb{F}_0$
2.  $\text{Im}(F_0) = \mathbb{E}_0$
3.  $F_0 F|_{\mathbb{E}_0} = I$  e  $F F_0|_R = I$
4.  $F_1 = I - F_0 F$  e  $F_2 = I - F F_0$  são tais que  $\text{Im}(F_1) = N$  e  $\text{Im}(F_2) = \mathbb{F}_0$

**Dem.:** Basta usar o lema 3.7.4

**Observação:** Note que  $F_1, F_2$  são compactos pois  $N$  e  $R$  têm dimensão finita. De fato, se  $\mathbb{E}$  ou  $\mathbb{F}$  for de dimensão finita, então qualquer operador linear contínuo de  $\mathbb{E}$  em  $\mathbb{F}$  é compacto.

Nosso objetivo agora é provar o seguinte teorema

**Teorema 3.7.6.**  $\text{Fred}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$  é aberto em  $L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$  e a função

$$\begin{aligned} i_F : \text{Fred}(\mathbb{E}, \mathbb{F}) : & \longrightarrow \mathbb{Z} \\ F & \longmapsto i_F(F) \end{aligned}$$

é contínua.

Para tanto usaremos o seguinte lema.

**Lema 3.7.5.** Seja  $G \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$  e suponha que existem operadores  $G_1, G_2 \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ ,  $K_1 \in K(\mathbb{E}, \mathbb{E})$  e  $K_2 \in K(\mathbb{F}, \mathbb{F})$  tais que

$$G_1 G = I - K_1 \quad \text{e} \quad G G_2 = I - K_2 \quad (3.7.1)$$

Então  $G$  é de Fredholm.

**Dem.:** Como  $\text{Ker}(G) \subset \text{Ker}(G_1 G)$  segue que  $\dim(\text{Ker}(G)) \leq \dim(\text{Ker}(I - K_1)) < \infty$ . Também temos  $\text{Im}(G) \supset \text{Im}(G G_2) = \text{Im}(I - K_2)$ , então  $\text{codim}(\text{Im}(G)) \leq \text{codim}(\text{Im}(I - K_2)) < \infty$ . □

**Dem.** (do teorema 3.7.6) :

Seja  $F \in \text{Fred}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$  e  $G \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ . Considere  $T = G - F$  e tome  $F_0, F_1, F_2$  como na proposição 3.7.5. Então valem

$$F_0 G = I - F_1 + F_0 T \quad G F_0 = I - F_2 + T F_0$$

Seja  $\varepsilon = \min\{\|F\|^{-1}, \|F_0\|^{-1}\}$  e tome  $G$  t.q.  $\|G - F\| < \varepsilon$ . Assim  $\|F_0 T\| \leq \|F_0\| \|T\| < 1$  e  $\|T F\| < 1 \Rightarrow I + F_0 T$  e  $I + T F_0$  possuem inversas contínuas. Então vale

$$\underbrace{(I + F_0 T)^{-1} F_0}_{G_1} G = I - \underbrace{(I + F_0 T)^{-1} F_1}_{K_1} \quad \text{e} \quad G \underbrace{F_0 (I + T F_0)^{-1}}_{G_2} = I - \underbrace{F_2 (I + T F_0)^{-1}}_{K_2}$$

que é a equação (3.7.1) do lema 3.7.5  $\Rightarrow \mathbf{G}$  é de Fredholm e  $\text{Fred}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$  é aberto.

Mais ainda, se olharmos para a proposição 3.7.5(3) vemos que (usando a notação da proposição 3.7.5)  $F_0 G|_{\mathbb{E}_0} = I + F_0 T \Rightarrow G|_{\mathbb{E}_0}$  é injetivo e, portanto,  $\text{Ker}(G) \cap \mathbb{E}_0 = \{0\}$ . Como  $\mathbb{E} = \text{Ker}(F) \oplus \mathbb{E}_0$ , segue que  $\dim(\text{Ker}(G)) \leq \dim(\text{Ker}(F))$ . Também segue que  $\text{codim}(\text{Im}(F)) - \text{codim}(\text{Im}(G)) = \dim(\text{Ker}(F)) - \dim(\text{Ker}(G))$ , logo  $i_F(G) = i_F(F) \Rightarrow i_F$  é contínua.  $\square$

**Observação:** Na demonstração acima obtivemos um resultado que vale a pena ser frisado : se  $F$  é de Fredholm e  $G$  está suficientemente próximo de  $F$ , então  $\text{Ker}(G) \subset \text{Ker}(F)$ .

**Corolário 3.7.6.1.** Se  $T \in K(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ , então  $i_F(I - T) = 0$ . Em particular, se  $F \in \text{Fred}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$  e  $F_0$  é a aplicação da proposição 3.7.5,  $i_F(F_0) = -i_F(F)$ .

**Dem.:** Dado  $t \in \mathbb{R}$ , o operador  $tT : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  é compacto e  $t \mapsto tT$  é uma função contínua de  $\mathbb{R}$  em  $L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ . Consequentemente,  $t \mapsto i_F(I - tT)$  é contínua e, como  $i_F(I - tT) = 0$  em  $t = 0$ , segue que  $i_F(I - tT) = 0$  para todo  $t$ . A segunda afirmação segue da proposição 3.7.5(4) e da observação logo após.  $\square$

**Lema 3.7.6.** Sejam  $\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}, \mathbb{H}$  espaços de Banach e  $A : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}, B : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{G}, C : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{H}$  operadores lineares contínuos com  $B$  compacto. Então  $B \circ A$  e  $C \circ B$  são compactos. Em particular  $K(\mathbb{E}, \mathbb{E})$  é um ideal por ambos os lados.

**Proposição 3.7.7.** Sejam  $A \in \text{Fred}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$  e  $B \in \text{Fred}(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ , então  $BA \in \text{Fred}(\mathbb{E}, \mathbb{G})$  e  $i_F(BA) = i_F(A) + i_F(B)$ .

**Dem.:** Sejam  $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$  como na proposição 3.7.5. Então temos

$$A_0 B_0 B A = A_0 (I - B_1) A = I - \underbrace{(A_1 + A_0 B_1 A)}_{F_1}$$

$$B A A_0 B_0 = B (I - A_2) B_0 = I - \underbrace{(B_2 + B A_2 B_0)}_{F_2}$$

Além disso  $F_1, F_2$  são compactos, pois  $A_1, B_2$  o são e  $A_0 B_1 A, B A_2 B_0$  também pelo lema 3.7.6. Logo  $BA$  é de Fredholm pelo lema 3.7.5.

Considere  $\mathbb{F}_1 = \text{Im}(A) \cap \text{Ker}(B)$  e tome  $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_4$  tais que

$$\text{Im}(A) = \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2 \quad \text{Ker}(B) = \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_3 \quad \mathbb{F} = \text{Im}(A) \oplus \mathbb{F}_3 \oplus \mathbb{F}_4$$

Seja  $d_i = \dim(\mathbb{F}_i)$ ,  $\Rightarrow d_1, d_3, d_4$  são finitos. Agora

$$\text{Ker}(BA) = \text{Ker}(A) \oplus \mathbb{E}_1 \quad \text{Im}(B) = \text{Im}(BA) \oplus \mathbb{G}_1$$

com  $\mathbb{E}_1 \subset \mathbb{E}_0$  t.q.  $A(\mathbb{E}_1) = \mathbb{F}_1$  e  $\mathbb{G}_1 = B(\mathbb{F}_4)$ . Logo  $\dim(\mathbb{E}_1) = d_1$  e  $\dim(\mathbb{G}_1) = d_4$ . Assim

$$i_F(BA) = \underbrace{\dim(\text{Ker}(BA))}_{\dim(\text{Ker}(A)) + d_1} - \underbrace{\text{codim}(\text{Im}(BA))}_{\text{codim}(\text{Im}(B)) + d_4} = \dim(\text{Ker}(A)) - \underbrace{(d_4 + d_3)}_{\text{codim}(\text{Im}(A))} + \underbrace{(d_3 + d_1)}_{\dim(\text{Ker}(B))} - \text{codim}(\text{Im}(B))$$

$\square$

Já vimos que  $K(\mathbb{E}, \mathbb{F})$  é fechado em  $L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ . Além disso, também é um ideal pelos dois lados (lema 3.7.6), logo, podemos considerar o anel  $\frac{L(\mathbb{E}, \mathbb{F})}{K(\mathbb{E}, \mathbb{F})}$ . Dessa maneira, diremos que os operadores  $T$  e  $S$  são compacto-equivalentes e escreveremos  $T \equiv_K S$  se  $T-S$  for compacto. Diremos que  $T$  é invertível módulo operador compacto e existir  $T_1 \in L(\mathbb{F}, \mathbb{E})$  t.q.  $TT_1 \equiv_K I_{\mathbb{F}}$  e  $T_1T \equiv_K I_{\mathbb{E}}$ .

**Lema 3.7.7.**  $T \equiv_K S, T_1 \equiv_K S_1 \Rightarrow TT_1 \equiv_K SS_1$ . Se  $T_1, T_2$  são inversas módulo operador compacto de  $T \Rightarrow T_1 \equiv_K T_2$ .

**Teorema 3.7.8.** Seja  $F \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ .  $F$  é de Fredholm se, e só se,  $F$  é invertível módulo operador compacto.

**Dem.:** Suponha  $F$  de Fredholm e escreva  $\mathbb{E} = N \oplus \mathbb{E}_0, \mathbb{F} = R \oplus \mathbb{F}_0$  onde  $N$  é o núcleo de  $F$  e  $R$  sua imagem. O operador  $S: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$  dado pela composição

$$\mathbb{F} = R \oplus \mathbb{F}_0 \xrightarrow{\text{projecção}} R \xrightarrow{F^{-1}} \mathbb{E}_0 \hookrightarrow \mathbb{E}$$

é inversa de  $F$  módulo operador compacto de  $F$ .

Reciprocamente, se  $F$  é invertível módulo operador compacto, denote por  $S$  tal inversa. Então temos

$$\begin{aligned} \text{Ker}(F) &\subset \text{Ker}(SF) \subset \text{Im}(I - SF) \\ \text{Im}(F) &\supset \text{Im}(FS) \end{aligned}$$

Logo  $\text{Ker}(F)$  é localmente compacto e, portanto, tem dimensão finita. Além disso, como  $FS = (I - T)$ , com  $T$  compacto, a imagem de  $FS$  tem codimensão finita  $\Rightarrow \text{codim}(\text{Im}(F)) < \infty$ . □

**Definição 3.7.4.** Sejam  $M, N$  variedades de Banach  $C^k$ , com  $k > 0$ , e  $f: M \rightarrow N, C^r, 1 \leq r \leq k$ . Diremos que  $f$  é de Fredholm em  $x_0 \in M$  se  $df_{x_0}$  for de Fredholm. O índice de Fredholm de  $f$  em  $x_0$  será  $i_F(f(x_0)) = i_F(df_{x_0})$ . Se  $f$  for de Fredholm em todo ponto de  $M$  diremos simplesmente que  $f$  é de Fredholm (em  $M$ ).

**Proposição 3.7.9.** Se  $f$  é de Fredholm em  $x_0$ , então  $f$  é de Fredholm em uma vizinhança  $U$  de  $x_0$ . Mais ainda, tal vizinhança pode ser tomada de modo que  $i_F(f(x)) = i_F(f(x_0)) \quad \forall x \in U$ .

**Dem.:** Direto do fato de  $f$  ser pelo menos  $C^1$  e do teorema 3.7.6. □

**Corolário 3.7.9.1.** Se  $M$  for conexa  $i_F(f(x))$  não depende de  $x$ . Neste caso, podemos definir  $i_F(f)$ .

**Definição 3.7.5.** Dados dois espaços topológicos  $X, Y$ , diremos que uma função  $f: X \rightarrow Y$  é própria se, para todo  $B \subset Y$  compacto,  $f^{-1}(B)$  for compacto. Se todo  $x \in X$  possuir vizinhança onde  $f$  é própria dizemos que  $f$  é localmente própria.

**Lema 3.7.8.** Sejam  $X, Y$  espaços métricos e  $f: X \rightarrow Y$  própria e contínua., então  $f$  é fechada.

**Dem.:** Tome  $A \subset X$  fechado e  $\{y_n\} \subset F(A)$  t.q.  $y_n \rightarrow y \in Y$ . Provemos que  $y \in f(A)$ .

O conjunto  $B = \{y_n\} \cup \{y\}$  é compacto  $\Rightarrow f^{-1}(B)$  é compacto. Tome  $x_n \in A$  t.q.  $f(x_n) = y_n \Rightarrow x_n \in f^{-1}(B) \Rightarrow \{x_n\}$  possui subsequência convergente, digamos  $x_{n_k} \rightarrow x$ . Como  $A$  é fechado,  $x \in A$  e  $f(x) = y$ . □

**Lema 3.7.9.** Se  $f:M \rightarrow N$  é de Fredholm então  $f$  é localmente própria.

**Dem.:** Basta provarmos para  $M=\mathbb{E}$  e  $N=\mathbb{F}$ . Tome  $x_0 \in \mathbb{E}$  e seja  $A=df_{x_0} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ . Então  $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \oplus \text{Ker}(A)$  e  $x_0 = (a_0, b_0)$ . A primeira derivada parcial  $d_1 f_{(a,b)}$  é injetiva com imagem fechada se  $(a, b)$  estiver próximo de  $(a_0, b_0)$ . Pelo teorema da função implícita, existe uma vizinhança  $D_1 \times D_2 \subset \mathbb{E}_1 \times \text{Ker}(A)$  de  $(a_0, b_0)$  com  $D_2$  compacto e  $f|_{D_1 \times \{b\}}$  é um difeomorfismo sobre a imagem para todo  $b \in D_2$ .

Seja  $D = f(D_1 \times D_2)$ ,  $B \subset D$  compacto. Mostremos que  $K = f^{-1}(B) \cap D_1 \times D_2$  é compacto, ou seja, que  $f|_{D_1 \times D_2}$  é própria. Tome  $x_i \in K$ ,  $x_i = (a_i, b_i)$  e  $y_i = f(x_i)$ . Como  $B$  é compacto, podemos supor sem perda de generalidade que  $y_i \rightarrow y \in B$  e também que  $b_i \rightarrow b \in D_2$ . Agora,  $f|_{D_1 \times \{b\}}$  é difeomorfismo sobre a imagem, logo, se  $f(a_i, b) \rightarrow y \Rightarrow a_i \rightarrow a \in D_1$ . □

**Corolário 3.7.9.2.** Se  $f:M \rightarrow N$  é de Fredholm então  $f$  é localmente fechada.

**Teorema 3.7.10. (Sard-Smale) :** Sejam  $M, N$  variedades  $C^k$  e conexas modeladas nos espaços de Banach  $\mathbb{E}$  e  $\mathbb{F}$  respectivamente. Se  $f : M \rightarrow N, C^r$ , é de Fredholm com  $\sup\{i_F(f), 0\} < r \leq k$ , então, o conjunto dos valores críticos de  $f$  é fechado e de 1ª categoria<sup>(2)</sup>.

**Dem.:** Como  $M$  e  $N$  satisfazem o 2º axioma da enumerabilidade e  $f$  é localmente fechada, fica claro que o conjunto dos pontos críticos é fechado e que só precisamos analisar localmente. Seja então  $U$  uma vizinhança fechada de  $x \in M$  onde  $f$  é fechada. Novamente só precisamos considerar o caso  $M = \mathbb{E}$  e  $N = \mathbb{F}$ . Mais uma vez ponha  $A=df_{x_0}, \mathbb{E} = \text{Ker}(A) \oplus \mathbb{E}_1, \mathbb{F} = \mathbb{F}_1 \oplus \mathcal{I}m(A)$ . Assim podemos identificar :  $\mathbb{E}_1 = \mathcal{I}m(A), \text{Ker}(A) = \mathbb{R}^n, \mathbb{F}_1 = \mathbb{R}^m$  e  $n - m = i_F(f)$ .

A menos de mudanças de coordenadas, podemos supor que  $f$  é da forma

$$f(a, b) = (g(a, b), b)$$

numa vizinhança  $U$  de  $x$ . Se denotarmos  $g(a, b) = g_b(a)$  temos que  $df_{(a,b)}$  é da forma

$$df_{(a,b)}(u, v) = (g'_b u + Tv, v)$$

para alguma aplicação linear (contínua)  $T : \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Logo  $(a, b)$  é ponto crítico de  $f$  se, e só se,  $a$  for ponto crítico de  $g_b$ .

Suponha então que  $f(a, b)$  seja um valor crítico com uma vizinhança de valores críticos. Mas então  $g_b(a)$  também é valor crítico para  $g_b$  com vizinhança de valores críticos, o que contradiz o teorema de Sard em dimensão finita ( $g_b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ). □

**Corolário 3.7.10.1.** Nas hipóteses do teorema de Sard-Smale, existe um conjunto aberto denso  $R \subset N$  tal que se  $y \in R \Rightarrow f^{-1}(y)$  é vazio ou uma subvariedade de  $M$  com dimensão  $i_F(f)$ .

<sup>2</sup>Para relemburar conceitos de categoria de Baire consulte [24], por exemplo.

## 4 Teoria de Morse

### 4.1 Alças

Denotaremos por  $D^n$  a bola unitária fechada de um espaço de Hilbert separável  $\mathbb{H}$  de dimensão  $0 \leq n \leq \infty$ .  $S^{n-1}$  será a esfera unitária correspondente e  $\overset{\circ}{D}^n$  o interior de  $D^n$ . Como  $\mathbb{H}$  é de Hilbert,  $f = \|\cdot\|^2$  é uma função  $C^\infty$  com 0 o único ponto crítico. Então  $D^n = f^{-1}((-\infty, 1])$  é uma subvariedade  $C^\infty$  de  $\mathbb{H}$  com bordo  $S^{n-1}$ .

**Definição 4.1.1.** Uma alça de índice  $n$  e co-índice  $m$ , ou uma  $(n,m)$ -alça, é o produto  $D^n \times D^m$ .

**Observação:** A menos que  $n$  ou  $m$  seja nulo, a  $(n,m)$ -alça não será uma variedade diferenciável (sem bordo), mas  $S^{n-1} \times D^m$  e  $\overset{\circ}{D}^n \times D^m$  sempre serão variedades de Hilbert  $C^\infty$ .

**Definição 4.1.2.** Sejam  $M$  uma  $C^k$ -variedade de Hilbert,  $N$  uma subvariedade fechada de  $M$  e  $f$  um homeomorfismo de uma  $(n,m)$ -alça num subconjunto fechado de  $M$ . Diremos que  $M$  é obtida de  $N$  colando uma  $(n,m)$ -alça via  $f$ , ou simplesmente que  $M = N \cup_f (D^n \times D^m)$  se :

1.  $M = N \cup f(D^n \times D^m)$
2.  $f|_{S^{n-1} \times D^m}$  é um difeomorfismo  $C^k$  sobre  $f(D^n \times D^m) \cap \partial N$
3.  $f|_{\overset{\circ}{D}^n \times D^m}$  é um difeomorfismo  $C^k$  sobre  $M \setminus N$

**Observação:** Podemos proceder indutivamente para obter  $M$  a partir de  $N$  colando um número finito de células.

**Lema 4.1.1.** Seja  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função não crescente  $C^\infty$  satisfazendo

$$h(t) = 1 \quad \text{se } x \leq \frac{1}{2}, \quad h(x) > 0 \quad \text{se } x < 1 \quad \text{e} \quad h(x) = 0 \quad \text{se } x > 1$$

Então, para  $0 \leq s \leq 1$  existe única solução  $g(s)$  da equação

$$\frac{h(g)}{1+g} = \frac{2}{3}(1-s) \tag{4.1.1}$$

no intervalo  $[0, 1]$  e  $g$  é crescente, contínua,  $C^\infty$  em  $[0, 1)$ ,  $g(0) = 1/2$  e  $g(1) = 1$ . Além disso, dado  $\varepsilon > 0$ , se  $u^2 - v^2 \geq -\varepsilon$  e  $u^2 - v^2 - \frac{3\varepsilon}{2}h\left(\frac{u^2}{\varepsilon}\right) \leq -\varepsilon$ , vale

$$u^2 \leq \varepsilon g\left(\frac{v^2}{\varepsilon + u^2}\right)$$

**Dem.:** Para  $g \in [0, 1]$  temos que  $f(g) = \frac{h(g)}{1+g}$  é estritamente decrescente,  $f(0) = 1$  e  $f(1) = 0$ . Então  $f$  tem inversa também contínua e estritamente decrescente, ou seja, podemos escrever  $g$  como  $g = g(f)$  para  $f$  em  $[0, 1]$ . Agora, para  $s = 0 \Rightarrow f = 2/3 \Rightarrow g = 1/2$  e para  $s = 1 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow g = 1$ . Como  $f$  vista como função de  $s$  é estritamente decrescente temos que  $g$  com função de  $s$  também é. Que  $g(s)$  é  $C^\infty$  segue do teorema da função inversa pois  $f'(g)$  não se anula para  $g \in [0, 1)$ .

Agora, seja

$$f(u, v) = u^2 - \varepsilon g\left(\frac{v^2}{\varepsilon + u^2}\right)$$

na região

$$u^2 - v^2 \geq -\varepsilon, \quad u^2 - v^2 - \frac{3\varepsilon}{2}h\left(\frac{u^2}{\varepsilon}\right) \leq -\varepsilon$$

É de fácil verificação que  $\frac{\partial f}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow u = 0$ , mais ainda, para cada  $v$  fixado, a função  $f_v(u) = f(u, v)$  tem um mínimo em 0, logo  $f$  deve assumir seu máximo na fronteira da região. Sobre a curva  $u^2 - v^2 = -\varepsilon \Leftrightarrow \frac{v^2}{\varepsilon + u^2} = 1$  temos  $f(u, v) = u^2 - \varepsilon$ . Se  $(u, v)$  não está sobre a outra curva então vale  $h(u^2/\varepsilon) > 0 \Rightarrow u^2 < \varepsilon$  e, portanto,  $f(u, v) < 0$ . Por outro lado, se estivermos sobre a curva

$$u^2 - v^2 - \frac{3\varepsilon}{2}h(u^2/\varepsilon) = -\varepsilon \text{ ou, equivalentemente, } \frac{v^2}{\varepsilon + u^2} = 1 - \frac{3}{2(1 + u^2/\varepsilon)}h(u^2/\varepsilon)$$

temos  $u^2/\varepsilon \geq 1/2$  (do contrário seria  $\frac{v^2}{\varepsilon + u^2} < 0$ ) e também  $u^2/\varepsilon \leq 1$ . Defina  $g(s) = u^2/\varepsilon$  e observe que

$$\frac{v^2}{\varepsilon + u^2} = 1 - \frac{3}{2} \frac{h(g(s))}{1 + g(s)} = 1 - (1 - s) = s$$

e, então  $f(u, v) = u^2 - \varepsilon g\left(\frac{v^2}{\varepsilon + u^2}\right) = \varepsilon g(s) - \varepsilon g(s) = 0$ , i.e.,  $f$  se anula sobre esta curva. Logo  $f \leq 0$  em toda região, ou seja,  $u^2 \leq \varepsilon g\left(\frac{v^2}{\varepsilon + u^2}\right)$  ali. □

**Proposição 4.1.1.** Seja  $B = B_{2\varepsilon}(0)$  a bola aberta de raio  $2\varepsilon$  num espaço de Hilbert  $\mathbb{H}$ . Considere  $P$  a projeção ortogonal num subespaço  $\mathbb{H}_m$  de dimensão  $m$  e  $Q = I - P$ , projeção num  $\mathbb{H}_n$  e defina  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(v) = \|Pv\|^2 - \|Qv\|^2$ . Defina também  $p(v) = f(v) - \frac{3\varepsilon}{2}h\left(\frac{\|Pv\|^2}{\varepsilon}\right)$  onde  $h$  é uma função como a do lema 4.1.1. Então  $M = \{x \in B; p(x) \leq -\varepsilon\}$  é obtida de  $N = \{x \in B; f(x) \leq -\varepsilon\}$  colando uma  $(n, m)$ -alça.

**Dem.:** Tome  $D^n \subset \mathbb{H}_n$  e  $D^m \subset \mathbb{H}_m$  e denote por  $\mathcal{A}$  o conjunto em  $B$  onde  $f \geq -\varepsilon$  e  $p \leq -\varepsilon$ . Então  $M = N \cup \mathcal{A}$  e  $N \cap \mathcal{A} \subset \partial N$ . Defina  $F: D^n \times D^m \rightarrow \mathbb{H}$  por

$$F(x, y) = (\varepsilon g(\|x\|^2) \|y\|^2 + \varepsilon)^{1/2} x + (\varepsilon g(\|x\|^2))^{1/2} y$$

onde  $g$  é uma função como a  $g$  do lema 4.1.1.

Assim obtemos

$$f(F(x, y)) = \varepsilon \left( g(\|x\|^2) \|y\|^2 - (1 + g(\|x\|^2)) \|x\|^2 \right) = \varepsilon \left( g(\|x\|^2) \|y\|^2 (1 - \|x\|^2) - \|x\|^2 \right) \geq -\varepsilon$$

$$\begin{aligned} p(F(x, y)) &= \varepsilon \left( g(\|x\|^2) \|y\|^2 (1 - \|x\|^2) - \|x\|^2 - \frac{3}{2} h(g(\|x\|^2) \|y\|^2) \right) \leq \\ &\leq \varepsilon \left( g(\|x\|^2) (1 - \|x\|^2) - \|x\|^2 - \frac{3}{2} h(g(\|x\|^2)) \right) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

**Observação:** Na última desigualdade use a definição de  $g$ :  $h(g(\|x\|^2)) = \frac{2}{3}(1 + g(\|x\|^2))(1 - \|x\|^2)$ .

Sendo assim, podemos concluir que  $F$  leva  $D^n \times D^m$  em  $\mathcal{A}$ .

Por outro lado, se  $w \in \mathcal{A}$  tome  $u = Pw, v = Qw$ . Então  $\|u\|^2 - \|v\|^2 \geq -\varepsilon$  e também  $\|u\|^2 - \|v\|^2 - \frac{3\varepsilon}{2}h\left(\frac{\|u\|^2}{\varepsilon}\right) \leq -\varepsilon$ . Portanto  $\frac{\|v\|^2}{\varepsilon + \|u\|^2} \leq 1 \Rightarrow g\left(\frac{\|v\|^2}{\varepsilon + \|u\|^2}\right)$  está bem definida e, pelo lema

4.1.1, temos  $\frac{\|u\|^2}{\varepsilon g\left(\frac{\|v\|^2}{\varepsilon + \|u\|^2}\right)} \leq 1$ . Logo

$$x = (\varepsilon + \|u\|^2)^{-\frac{1}{2}}v \in D^n \quad \text{e} \quad y = \left(\varepsilon g\left(\frac{\|v\|^2}{\varepsilon + \|u\|^2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}u \in D^m$$

o que nos permite definir  $G: \mathcal{A} \rightarrow D^n \times D^m$  dada por

$$G(w) = \left( (\varepsilon + \|Pw\|^2)^{-\frac{1}{2}}Qw, \left( \varepsilon g\left(\frac{\|Qw\|^2}{\varepsilon + \|Pw\|^2}\right) \right)^{-\frac{1}{2}}Pw \right)$$

Com alguma paciência ve-se que  $F$  e  $G$  são inversas e, portanto, dão um homeomorfismo entre  $\mathcal{A}$  e  $D^n \times D^m$ . Como  $g$  é  $C^\infty$  como derivada não nula em  $[0,1]$  segue que  $F$  é  $C^\infty$  em  $\overset{\circ}{D}^n \times D^m$  e em  $S^{n-1} \times D^m$   $F$  é dada por

$$F(x, y) = (\varepsilon(\|y\|^2 + 1))^{1/2}x + \varepsilon^{1/2}y$$

que é um difeomorfismo  $C^\infty$  sobre  $N \cap \mathcal{A}$ .

□

**Observação:** Esta seção segue de perto o livro de Palais e Terng [4]. Talvez seja interessante o leitor dar uma olhada nas ilustrações lá contidas para uma maior intuição sobre o processo.

## 4.2 Resultados Básicos da Teoria de Morse

Consideremos para esta seção variedades riemannianas  $C^{k+1}$ ,  $k > 0$ , sem bordo e funções  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  também  $C^{k+1}$  tendo apenas pontos críticos não degenerados (consequentemente são todos isolados). Além disso, vamos exigir que o par  $(M, f)$  satisfaça a seguinte condição :

(C) Se  $S \subset M$  é um conjunto onde  $f$  é limitada e  $\inf\{\|\nabla f_x\|; x \in S\} = 0$ , então existe um ponto crítico de  $f$  aderente a  $S$ .

**Observação:** Esta condição foi introduzida originalmente por Palais e Smale (veja [1]) para substituir, no caso de dimensão infinita, a perda de compacidade que havia na teoria de Morse clássica com variedades de dimensão finita. A condição (C) de Palais-Smale é então uma condição de compacidade sobre a função  $f$ , no caso de dimensão finita, ela é inócua.

Tome dois números reais  $a < b$  e suponha que  $(x_n)_n$  seja uma sequência de pontos críticos distintos de  $f$  com  $a < f(x_n) < b$ . Seja  $\rho$  a métrica riemanniana de  $M$ . Escolha então pontos regulares  $(z_n)$  tais que

$$\rho(z_n, x_n) < \frac{1}{n}, \quad \|\nabla f_{z_n}\| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad a < f(z_n) < b$$

Pela condição (C) existe subsequência de  $(z_n)$  convergindo para um ponto crítico de  $f$ . Mas isso implicaria na convergência da subsequência correspondente de  $(x_n)$ , contradizendo o isolamento dos pontos críticos, ou seja :

**Proposição 4.2.1.** Se  $a < b$  são números reais, existem no máximo finitos pontos críticos  $x$  de  $f$  satisfazendo  $a < f(x) < b$ . Em particular, existem finitos valores críticos de  $f$  entre  $a$  e  $b$  sendo que cada um tem pré-imagem finita.



**Proposição 4.2.2.** Sejam  $M$  uma variedade completa e  $\alpha : (t^-, t^+) \rightarrow M$  uma curva integral maximal de  $\nabla f$ . Se  $\lim_{t \rightarrow t^+} f(\alpha(t)) < \infty$ , então  $t^+ = \infty$  e  $\alpha$  tem um ponto crítico de  $f$  como ponto de acumulação quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Dem.:** Defina  $g(t) = f(\alpha(t))$ . Temos

$$g'(t) = df_{\alpha(t)}\alpha'(t) = df_{\alpha(t)}\nabla f_{\alpha(t)} = \|\nabla f_{\alpha(t)}\|^2$$

então  $g$  é não decrescente e tem um limite  $L$  quando  $t \rightarrow t^+$ . Se  $L < \infty$ , como

$$g(t) = g(0) + \int_0^t g'(s)ds = g(0) + \int_0^t \|\nabla f_{\alpha(s)}\|^2 ds$$

também teríamos

$$\int_0^{t^+} \|\nabla f_{\alpha(s)}\|^2 ds < \infty$$

Assim, usando a desigualdade de Schwarz obtemos

$$\int_0^{t^+} \|\nabla f_{\alpha(s)}\| ds \leq t^{+1/2} \left( \int_0^{t^+} \|\nabla f_{\alpha(s)}\|^2 ds \right)^{1/2}$$

Logo  $t^+ = \infty$ , se não, teríamos contradição com a proposição 3.3.3. Como  $\int_0^{t^+} \|\nabla f_{\alpha(s)}\|^2 ds < \infty$ , temos obrigatoriamente que  $\inf\{\|\nabla f_{\alpha(t)}\|; 0 \leq t < \infty\} = 0$ . Como  $(M, f)$  satisfaz a condição (C) e estamos supondo  $f \circ \alpha$  limitada para  $0 \leq t < \infty$  segue que  $\alpha$  tem um ponto crítico de  $f$  como ponto de acumulação quando  $t \rightarrow \infty$ . □

**Observação:** Obviamente também temos que, se  $\lim_{t \rightarrow t^-} f(\alpha(t)) < \infty$ , então  $t^- = -\infty$  e  $\alpha$  tem um ponto crítico de  $f$  em sua aderência quando  $t \rightarrow -\infty$ .

**Proposição 4.2.3.** Se  $M$  é completa e  $f$  não tem valores críticos em  $[a, b]$ ,  $\nabla f$  é  $C^k$ -fortemente transversal a  $f$  em  $[a, b]$ .

**Dem.:** Pela proposição 4.2.1 encontramos  $\delta > 0$  tal que  $f$  não tenha valores críticos em  $[a - \delta, b + \delta]$ . Se  $V = f^{-1}(a - \delta, b + \delta)$  temos  $(\nabla f)f = \|\nabla f\|^2$  estritamente positiva e  $C^k$  em  $V$ . Fixe  $x$  em  $M$  e olhe para  $\alpha_x : (t^-, t^+) \rightarrow M$  a curva maximal de  $\nabla f$  por  $x$ . Precisamos encontrar  $t^- < t_1 < 0 < t_2 < t^+$  com  $\alpha_x(t_i) \notin V$ , ou seja, com  $f(\alpha_x(t_1)) \leq a - \delta$  e  $f(\alpha_x(t_2)) \geq b + \delta$ . Se fosse  $f(\alpha_x(t)) < b + \delta$  sempre que  $0 < t < t^+$ , pela proposição 4.2.2  $\alpha_x$  teria um ponto crítico  $y$  de  $f$  aderente. Sendo  $f$  contínua e  $f \circ \alpha_x$  monótona segue que  $a - \delta \leq f(x) \leq f(y) \leq b + \delta$  e  $f(y)$  seria valor crítico de  $f$  em  $[a - \delta, b + \delta]$ . □

**Corolário 4.2.3.1.** Nas condições da proposição anterior  $M_a$  é  $C^k$ -difeomorfo a  $M_b$ .

**Dem.:** Direto do teorema 3.5.2 (transversalidade forte).

Resta saber o que acontece quando passamos por um valor crítico, i.e., qual é a diferença topológica entre  $M_a$  e  $M_b$  quando existe um valor crítico  $c$  entre  $a$  e  $b$ . O próximo teorema é o ponto central da teoria de Morse e sua demonstração usa o lema de Morse 3.4.2 como ferramenta fundamental.

**Teorema 4.2.4.** Seja  $f$  uma função a valores reais  $C^{k+1}$ ,  $k > 0$ , definida numa variedade riemanniana completa  $M$   $C^{k+1}$  que tem apenas pontos críticos não degenerados (dizemos que  $f$  é função de Morse) e que satisfaça a condição (C). Se  $c$  é valor crítico de  $f$  correspondente aos pontos críticos  $x_1, \dots, x_r$  que têm índice e co-índice  $(n_i, m_i)$  respectivamente e  $[a, b]$  é tal que  $c$  é o único valor crítico de  $f$  então  $M_b$  é  $C^k$  difeomorfo a  $M_a$  colando (de forma disjunta)  $r$  alças de índice e co-índice  $(n_i, m_i)$ .

**Dem.:** Sem perda de generalidade podemos considerar  $c = 0$ . Primeiro consideremos o caso em que  $f^{-1}(0)$  seja um único ponto  $x_1$  de índice e co-índice  $(n, m)$ . Seja  $(U, \varphi)$  uma carta ao redor de  $x$  como a do lema de Morse, ou seja,  $U$  é um aberto de um espaço de Hilbert  $\mathbb{H} = \mathbb{H}_- \times \mathbb{H}_+$  sendo que  $\mathbb{H}_-, \mathbb{H}_+$  têm dimensão  $n$  e  $m$  respectivamente,  $\varphi(0) = x$  e  $f \circ \varphi(u) = \|u_+\|^2 - \|u_-\|^2$ , com  $u = (u_-, u_+)$ .

Escolha  $\varepsilon$  de modo que  $[-2\varepsilon, 2\varepsilon] \subset [a, b]$  e que a bola fechada  $B = \overline{B_{2\sqrt{\varepsilon}}(0)} \subset U$ . Seja  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como no lema 4.1.1 e defina

$$g(\varphi(u)) = f(\varphi(u)) - \frac{3\varepsilon}{2} h\left(\frac{\|u_+\|^2}{\varepsilon}\right)$$

Vamos estender  $g: M \rightarrow \mathbb{R}$  de forma diferenciável e de modo que  $g(x) \leq f(x)$  e  $g(x) = f(x)$  sempre que  $f(x) \geq \varepsilon$  ou  $f(x) \leq -2\varepsilon$  e  $x \notin \varphi(U)$ . Suponha que  $u \in U$  e  $f(\varphi(u)) \geq -2\varepsilon$  e  $g(\varphi(u)) \neq f(\varphi(u))$ . Então  $h(\|u_+\|^2/\varepsilon) \neq 0$  e, portanto,  $\|u_+\|^2 < \varepsilon$ . Logo,  $\|u\|^2 = \|u_-\|^2 + \|u_+\|^2 = 2\|u_+\|^2 - f(\varphi(u)) < 4\varepsilon$ , ou seja,  $u \in \overset{\circ}{B}$ . Assim podemos fazer  $g=f$  fora de  $\varphi(U)$ . Em particular  $g \leq f$  no fechado  $f^{-1}([-2\varepsilon, \infty))$ , então podemos acabar de estender  $g$  mantendo a mesma propriedade. Além disso, se  $f(\varphi(u)) \geq \varepsilon$  e  $u \in U$ ,  $\|u_+\|^2 \geq f(\varphi(u)) \geq \varepsilon \Rightarrow h(\|u_+\|/\varepsilon) = 0 \Rightarrow f(\varphi(u)) = g(\varphi(u))$ .

Observe agora que o intervalo  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  não contém pontos críticos de  $g$ . De fato, se  $S = g^{-1}([-2\varepsilon, \varepsilon])$ , temos que  $f=g$  em  $S \setminus \varphi(U)$ , então, todo ponto crítico de  $g$  ali seria ponto crítico de  $f$  em  $f^{-1}([-2\varepsilon, 2\varepsilon])$ , mas o único ponto crítico de  $f$  neste intervalo é  $x_0 \in \varphi(U)$ . Então basta olharmos para os pontos críticos de  $g$  em  $\varphi(U)$ . Mas em  $U$  temos  $g(\varphi(u)) = \|u_+\|^2 - \|u_-\|^2 - \frac{3\varepsilon}{2} h(\|u_+\|^2/\varepsilon)$  e, como  $h' \leq 0$ , basta derivar para ver que o único ponto crítico de  $g \circ \varphi$  é a origem, mas  $g(\varphi(0)) = -\frac{3\varepsilon}{2}$ .

Então temos que  $M_\varepsilon(f) = M_\varepsilon(g)$ , pois  $f=g$  se  $f \geq \varepsilon$ , e  $M_\varepsilon(g)$  é difeomorfa a  $M_{-\varepsilon}(g)$  pois  $g$  não tem pontos críticos em  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ . Que  $M_{-\varepsilon}(g)$  é obtida de  $M_{-\varepsilon}(f)$  colando uma  $(n, m)$ -alça segue da proposição 4.1.1. Agora, como podemos usar o mesmo processo em vizinhas disjuntas de vários pontos críticos, o resultado segue. □

Considere agora espaços de Hilbert  $\mathbb{H}_i, i = 1, \dots, n$ . Seja  $d_i$  a dimensão de  $\mathbb{H}_i$  e suponha que  $d_i < \infty$  se  $i \leq m$  e  $d_i = \infty$  para  $i > m$ . Considere funções contínuas  $g_i: S_i \rightarrow X$  com imagens disjuntas onde  $S_i$  é a esfera unitária de  $\mathbb{H}_i$  e  $X$  um espaço topológico. Então obtemos um novo espaço  $X \cup_{g_i} D_i$  colando as células (discos)  $D_i$  através de  $g_i$ .

**Lema 4.2.1.**  $X \cup_{g_1} D_1 \cup_{g_2} \dots \cup_{g_m} D_m$  é um retrato de deformação forte de  $X \cup_{g_1} D_1 \cup_{g_2} \dots \cup_{g_n} D_n$ .

**Dem.:** É suficiente lembrar que a esfera  $S$  de um espaço de Hilbert  $\mathbb{H}$  de dimensão infinita é retrato de deformação forte do disco de  $\mathbb{H}$ .

Seja então  $N$  uma variedade de Hilbert com bordo e que  $M$  é obtida de  $N$  colando  $n$  alças, i.e., temos  $n$  funções de colagem  $f_i: D^{d_i} \times D^{e_i}$ . Defina  $g_i: S^{d_i-1} \rightarrow \partial N$  por  $g_i(y) = f_i(y, 0)$  (que é um homeomorfismo). É claro que  $N \cup_{f_i} D^{d_i} \times 0$  é idêntica a  $N \cup_{g_i} D^{d_i}$ .

**Proposição 4.2.5.**  $N \cup_{g_i} D^{d_i}$  é um retrato por deformação forte de  $M$ .

**Dem.:** É suficiente mostrar que  $(D^d \times 0) \cup (S^{d-1} \times D^e)$  é retrato por deformação forte de  $D^d \times D^e$  e, como este último é convexo, basta definir uma retração  $r : D^d \times D^e \rightarrow (D^d \times 0) \cup (S^{d-1} \times D^e)$  :

$$r(x, y) = \begin{cases} (x, 0) & , \text{ se } y = 0 \\ (2x/(2 - \|y\|), 0) & , \text{ se } \|x\| \leq 1 - \|y\|/2 \\ (x/\|x\|, (2\|x\| + \|y\| - 2)y/\|y\|) & , \text{ se } \|x\| \geq 1 - \|y\|/2 \end{cases}$$

□

**Corolário 4.2.5.1.** Se  $d_1, \dots, d_m$  são os índices finitos então  $N \cup_{g_1} D^{d_1} \cup_{g_2} \dots \cup_{g_m} D^{d_m}$  é retrato de deformação forte de  $M$ .

Tudo isso resulta no

**Teorema 4.2.6.** Seja  $M$  uma  $C^2$ -variedade riemanniana completa e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^1$  satisfazendo a condição (C) e sendo duas vezes diferenciável em seus pontos críticos não degenerados. Considere um valor crítico  $c$  e seus pontos críticos correspondentes  $x_1, \dots, x_n$  de índice finito  $d_i$ . Suponha que  $c$  seja o único valor crítico de  $f$  em  $[a, b]$ . Então  $M_b$  é um retrato de deformação forte de  $M_a$  colando células (de forma disjunta) de dimensão  $d_i$  no bordo de  $M_a$ .

**Corolário 4.2.6.1.**  $H_k(M_b, M_a) \cong \mathbb{Z}^{c(k)}$  onde  $c(k)$  é o número de pontos críticos de índice  $k$  no nível  $c$ .

### 4.3 Introdução ao Cálculo das Variações

**Definição 4.3.1.** Uma função  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dita absolutamente contínua se uma das seguintes condições equivalentes é satisfeita.

- Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, se  $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_{2k+1} \leq 1$  e  $\sum_{i=0}^k |t_{2i+1} - t_{2i}| < \delta$ , vale  $\sum \|\alpha(t_{2i+1}) - \alpha(t_{2i})\| < \varepsilon$ .
- Existe função integrável  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $\alpha(t) = \alpha(0) + \int_0^t g(s) ds$

**Observação:** É claro que uma função absolutamente contínua é contínua. Veja também que se  $\alpha$  é absolutamente contínua então  $\alpha'$  existe q.t.p.. Também, se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é lipschitziana, então  $f \circ \alpha$  é absolutamente contínua.

**Definição 4.3.2.** O conjunto das funções quadrado integráveis de  $I=[0, 1]$  em  $\mathbb{R}^n$  será denotado por  $H_0(I, \mathbb{R}^n)$  (ou também  $L^2(I, \mathbb{R}^n)$ ).  $H_0(I, \mathbb{R}^n)$  é um espaço vetorial com as operações usuais e se torna um espaço de Hilbert (módulo ser igual q.t.p.) com o produto interno

$$\langle \alpha, \beta \rangle_0 = \int_0^1 \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle dt$$

Também definimos  $H_1(I, \mathbb{R}^n)$  como sendo o conjunto das funções absolutamente contínuas cujas derivadas estão em  $H_0(I, \mathbb{R}^n)$ .  $H_1$  também é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle \alpha, \beta \rangle_1 = \langle \alpha(0), \beta(0) \rangle + \langle \alpha', \beta' \rangle_0$$

**Lema 4.3.1.** A aplicação  $\mathbb{R}^n \times H_0(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_1(I, \mathbb{R}^n)$ ,  $(x, \alpha) \mapsto \beta$ , onde  $\beta(t) = x + \int_0^t \alpha(s) ds$  é uma isometria bijetiva.

Considere a aplicação

$$\begin{array}{ccc} D : & H_1(I, \mathbb{R}^n) & \rightarrow H_0(I, \mathbb{R}^n) \\ & \alpha & \mapsto \alpha' \end{array}$$

e defina  $H_1^*(I, \mathbb{R}^n) = \{\alpha \in H_1; \alpha(0) = \alpha(1) = 0\}$ . Temos de imediato a

**Proposição 4.3.1.** D é um operador linear limitado de norma 1,  $H_1^*$  é um subespaço vetorial de codimensão  $2n$  em  $H_1$  e D leva  $H_1^*$  sobrejetiva e isometricamente no subespaço de  $H_0$  formado pelas funções  $g$  que  $\int_0^1 g(t) dt = 0$ , ou seja, no complemento ortogonal das funções constantes em  $H_0(I, \mathbb{R}^n)$ .

**Proposição 4.3.2.** Se  $\alpha \in H_1^*$  e  $\beta$  é absolutamente contínua então

$$\int_0^1 \langle \beta'(t), \alpha(t) \rangle dt = \langle \beta, -D\alpha \rangle_0$$

**Dem.:** A função  $t \mapsto \langle \beta(t), \alpha(t) \rangle$  é absolutamente contínua e tem derivada  $\langle \beta'(t), \alpha(t) \rangle + \langle \beta(t), \alpha'(t) \rangle$ . Agora é só lembrar que uma função absolutamnte contínua é a integral de sua derivada e que  $\langle \beta(t), \alpha(t) \rangle$  se anula nos extremos.

□

**Proposição 4.3.3.** A inclusão  $C^0(I, \mathbb{R}^n) \hookrightarrow H_0(I, \mathbb{R}^n)$  é contínua.

**Teorema 4.3.4. (Desigualdade de Sobolev) :** Para  $\alpha \in H_1(I, \mathbb{R}^n)$  vale

$$\|\alpha(t) - \alpha(s)\| \leq |t - s|^{1/2} \|\alpha'\|_0 \leq |t - s|^{1/2} \|\alpha\|_1$$

**Dem.:** Seja  $\chi$  a função característica do intervalo  $[s, t]$ . Temos  $\|\chi\|_0^2 = \int_0^1 \chi^2 = \int_s^t 1 = t - s$  e então  $\|\alpha(t) - \alpha(s)\| = \|\int_s^t \alpha'\| = \|\int_0^1 \chi \alpha'\| \leq |t - s|^{1/2} \|\alpha'\|_0$ .

□

**Corolário 4.3.4.1.**  $\|\alpha\|_\infty \leq 2\|\alpha\|_1$

**Dem.:**  $\|\alpha(t)\| \leq \|\alpha(0)\| + \|\alpha(t) - \alpha(0)\| \leq \|\alpha\|_1 + |t|^{1/2} \|\alpha\|_1 \leq 2\|\alpha\|_1$ .

□

**Proposição 4.3.5.** Seja  $S \subset H_1$  limitado. Então S tem fecho compacto em  $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ , consequentemente também o tem em  $H_0$ .

**Dem.:** Usando o teorema de Arzela-Ascoli, basta provarmos que S é limitado e equicontínuo em  $C^0$ . Pelo último corolário já vemos que S é limitado na norma  $\|\cdot\|_\infty$ . A equicontinuidade segue da desigualdade de Sobolev. A última afirmação segue direto da proposição 4.3.3.

□

**Proposição 4.3.6.** Se  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é  $C^{k+2}$  então a função

$$\begin{array}{ccc} \hat{f} : & H_1(I, \mathbb{R}^n) & \rightarrow H_1(I, \mathbb{R}^m) \\ & \alpha & \mapsto f \circ \alpha \end{array}$$

é  $C^k$ . Além disso, para  $1 \leq i \leq k$  temos

$$d^i \hat{f}_\alpha(\beta_1, \dots, \beta_i)(t) = d^i f_{\alpha(t)}(\beta_1(t), \dots, \beta_i(t))$$

A demonstração é consequência do seguinte lema :

**Lema 4.3.2.** Seja  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow L_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  uma função  $C^1$ . Podemos definir um função contínua,  $\hat{F} : H_1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow L_k(H_1(I, \mathbb{R}^n), H_1(I, \mathbb{R}^m))$ , dada por  $\hat{F}(\alpha)(\beta_1, \dots, \beta_k)(t) = F(\alpha(t))(\beta_1(t), \dots, \beta_k(t))$ . Se  $F$  for  $C^3$  então  $\hat{F}$  é  $C^1$  e  $d\hat{F} = \widehat{dF}$

**Dem.:** Observe que

$$(\hat{F}(\alpha)(\beta_1, \dots, \beta_k))'(t) = dF_{\alpha(t)}(\alpha'(t))(\beta_1(t), \dots, \beta_k(t)) + \sum_{i=1}^k F(\alpha(t))(\beta_1(t), \dots, \beta_k(t))$$

e, portanto,

$$\|(\hat{F}(\alpha)(\beta_1, \dots, \beta_k))'(t)\| \leq \|dF_{\alpha(t)}\| \|\alpha'(t)\| \|\beta_1(t)\| \cdots \|\beta_k(t)\| + \sum_{i=1}^k \|F(\alpha(t))\| \|\beta_1(t)\| \cdots \|\beta_k(t)\|$$

Como  $\|\beta_i\|_\infty \leq 2\|\beta_i\|_1$ , segue que

$$\|(\hat{F}(\alpha)(\beta_1, \dots, \beta_k))'(t)\|_0 \leq 2^k P(\alpha) \|\beta_1\|_1 \cdots \|\beta_k\|_1$$

onde  $P(\alpha) = \sup \|dF_{\alpha(t)}\| \|\alpha'(t)\|_0 + k \sup \|F(\alpha(t))\|$ . Além disso, também

$$\|\hat{F}(\alpha)(\beta_1, \dots, \beta_k)\|_\infty \leq 2^k \sup \|F(\alpha(t))\| \|\beta_1\|_1 \cdots \|\beta_k\|_1$$

Logo temos

$$\|\hat{F}(\alpha)(\beta_1, \dots, \beta_k)\|_1 \leq K(\alpha) \|\beta_1\|_1 \cdots \|\beta_k\|_1$$

segue que  $\hat{F}(\alpha) \in L_k(H_1(I, \mathbb{R}^n); H_1(I, \mathbb{R}^m))$ . Então tome  $\rho \in H_1(I, \mathbb{R}^n)$ . Temos

$$\|(\hat{F}(\alpha) - \hat{F}(\rho))(\beta_1, \dots, \beta_k)\|_\infty \leq 2^k \sup \|F(\alpha(t)) - F(\rho(t))\| \|\beta_1\|_1 \cdots \|\beta_k\|_1$$

e, consequentemente

$$\|((\hat{F}(\alpha) - \hat{F}(\rho))(\beta_1, \dots, \beta_k))'\|_0 \leq 2^k M(\alpha, \rho) \|\beta_1\|_1 \cdots \|\beta_k\|_1$$

com  $M(\alpha, \rho) = \sup \|dF_{\alpha(t)}\| \|\alpha' - \rho'\|_0 + \sup \|dF_{\alpha(t)} - dF_{\rho(t)}\| \|\rho'\|_0 + \sup \|F(\alpha(t)) - F(\rho(t))\|$ . Então

$$\|\hat{F}(\alpha) - \hat{F}(\rho)\| \leq K(\alpha, \rho)$$

onde a norma é a de  $L_k(H_1(I, \mathbb{R}^n); H_1(I, \mathbb{R}^m))$  e  $K(\alpha, \rho) \rightarrow 0$  se forem a 0  $\sup \|F(\alpha(t)) - F(\rho(t))\|$ ,  $\sup \|dF_{\alpha(t)} - dF_{\rho(t)}\|$  e  $\|\alpha' - \rho'\|_0$ . Mas, se  $\rho \rightarrow \alpha$  em  $H_1(I, \mathbb{R}^n) \Rightarrow \|\alpha' - \rho'\|_0 \leq \|\alpha - \rho\|_1$  vai a 0 e  $\rho \rightarrow \alpha$  uniformemente. Logo, como  $F$  e  $dF$  são contínuas, também  $F(\rho(t)) \rightarrow F(\alpha(t))$  e  $dF_{\rho(t)} \rightarrow dF_{\alpha(t)}$  uniformemente, logo,  $\hat{F}$  é contínua.

Suponha agora que  $F$  é  $C^3$ . Usando o teorema do valor médio, obtemos uma função  $C^1$ ,  $\mathcal{R} : \mathbb{R}^n \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n; L_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ , tal que, se  $x = p + v$ , então  $F(x) - F(p) - dF_p(v) = \mathcal{R}(x)(v, v)$ . Assim,

$$\hat{\mathcal{R}} : H_1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(H_1(I, \mathbb{R}^n); H_1(I, L_k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)))$$

é contínua (pela 1ª parte da demonstração) e, se  $\alpha$  e  $x = \alpha + \rho$  estão em  $H_1(I, \mathbb{R}^n)$  temos que  $\hat{F}(x) - \hat{F}(\alpha) - d\hat{F}_\alpha(\rho) = \hat{\mathcal{R}}(x)(\rho, \rho)$ . Logo  $\hat{F}$  é diferenciável com  $d\hat{F} = \widehat{dF}$ . Usando novamente a 1ª parte da demonstração segue que  $\hat{F}$  é  $C^1$ .

□

**Proposição 4.3.7.** Escreva  $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$ . A função

$$\begin{array}{ccc} H_1(I, \mathbb{R}^n) \times H_1(I, \mathbb{R}^m) & \rightarrow & H_1(I, \mathbb{R}^{n+m}) \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \alpha + \beta \end{array}$$

é uma isometria sobrejetora

**Definição 4.3.3.** Se  $M$  for uma variedade de  $C^1$  de dimensão finita, definimos  $H_1(I, M)$  como sendo o conjunto das funções contínuas  $\alpha : I \rightarrow M$  tais que  $\varphi^{-1} \circ \alpha$  seja uma função absolutamente contínua com  $\|(\varphi^{-1} \circ \alpha)'\| \in L^2$  para toda carta  $\varphi$ . Se  $M$  for  $C^2$  e  $\alpha \in H_1(I, M)$  definimos

$$H_1(I, M)_\alpha = \{\beta \in H_1(I, TM); \beta(t) \in T_{\alpha(t)}M\}$$

Para  $x, y \in M$  definimos

$$\Lambda(M; x, y) = \{\alpha \in H_1(I, M); \alpha(0) = x, \alpha(1) = y\}$$

e se  $\alpha \in \Lambda(M; x, y)$

$$\Lambda(M; x, y)_\alpha = \{\beta \in H_1(I, M)_\alpha; \beta(0) = 0_x, \beta(1) = 0_y\}$$

**Observação:** Veja que  $H_1(I, M)_\alpha$  se torna um espaço vetorial com as operações pontuais e que  $\Lambda(M, x, y)_\alpha$  é um subespaço de  $H_1(I, M)_\alpha$ .

**Proposição 4.3.8.** Suponha que  $M$  seja um  $C^{k+4}$ -variedade fechada em  $\mathbb{R}^n$ , ( $k \geq 1$ ). Então  $H_1(I, M)$  é formado pelas funções  $\alpha \in H_1(I, \mathbb{R}^n)$  tais que  $\alpha(I) \subset M$  e é uma  $C^k$ -subvariedade fechada de  $H_1(I, \mathbb{R}^n)$ , assim como  $\Lambda(M; x, y)$  é uma  $C^k$ -subvariedade de  $H_1(I, M)$ . O espaço tangente  $T_\alpha H_1(I, M)$  é  $H_1(I, M)_\alpha$  que coincide com o espaço  $\{\beta \in H_1(I, \mathbb{R}^n); \beta(t) \in T_{\alpha(t)}M\}$ . Também,  $T_\alpha \Lambda(M, x, y) = \Lambda(M, x, y)_\alpha$  que é o espaço  $\{\beta \in H_1(I, M)_\alpha; \beta(0) = \beta(1) = 0\}$ .

**Dem.:** É claro que  $H_1(I, M) = \{\alpha \in H_1(I, \mathbb{R}^n); \alpha(I) \subset M\}$  assim como  $H_1(I, M)_\alpha$  e  $\Lambda(M; x, y)_\alpha$  são os conjuntos ditos. Sendo  $M$  fechada em  $\mathbb{R}^n$  segue que  $H_1(I, M)$  é fechado em  $C^0(I, \mathbb{R}^n)$  e, consequentemente, também em  $H_1(I, \mathbb{R}^n)$ . Analogamente,  $\Lambda(M; x, y)$  é fechado em  $H_1(I, \mathbb{R}^n)$  e  $H_1(I, M)_\alpha$  e  $\Lambda(M; x, y)_\alpha$  são subespaços fechados de  $H_1(I, \mathbb{R}^n)$ . Como  $M$  é  $C^{k+4}$ , existe uma métrica  $C^{k+3}$  em  $\mathbb{R}^n$  na qual  $M$  é totalmente geodésica. Seja então  $E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  a aplicação exponencial correspondente, i.e.,  $t \mapsto E(p, tv)$  é a geodésica por  $p$  com velocidade  $v$ .  $E$  é uma aplicação  $C^{k+2}$ . Tome  $\alpha \in H_1(I, M)$  e defina  $\varphi : H_1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_1(I, \mathbb{R}^n)$  por

$$\varphi(\beta)(t) = E(\alpha(t), \beta(t))$$

Então  $\varphi$  é  $C^k$  (proposições 4.3.6 e 4.3.7) e  $\varphi(0) = \alpha$ . Além disso, usando a proposição 4.3.6, temos  $d\varphi_0(\beta)(t) = dE_0^{\alpha(t)}(\beta(t))$  onde  $E^{\alpha(t)}(v) = E(\alpha(t), v)$ . Como  $dE_0^{\alpha(t)}$  é a identidade segue que  $\varphi$  leva uma vizinhança do 0 de  $H_1(I, \mathbb{R}^n)$   $C^k$ -difeomorficamente numa vizinhança de  $\alpha$ . Sendo  $M$  totalmente geodésica tem-se que, se  $\beta$  está próxima de 0, então  $\varphi(\beta) \in H_1(I, M)$  se, e só se,  $\beta \in H_1(I, M)_\alpha$  e, analogamente, se  $\alpha \in \Lambda(M; x, y)$ , tem-se  $\varphi(\beta) \in \Lambda(M; x, y) \Leftrightarrow \beta \in \Lambda(M; x, y)_\alpha$ . Assim  $\varphi$  nos fornece uma carta local para uma vizinhança de  $\alpha$  que é a restrição de uma  $C^k$ -carta para  $H_1(I, \mathbb{R}^n)$  e o resultado segue. □

**Corolário 4.3.8.1.** Se  $M$  e  $N$  forem  $C^{k+4}$ -subvariedades de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$  respectivamente e  $f:M \rightarrow N$  for uma função  $C^{k+4}$ , a função  $\hat{f}: H_1(I, M) \rightarrow H_1(I, N)$  definida por  $\hat{f}(\lambda)(t) = f \circ \lambda(t)$  é  $C^k$  e sua diferencial é  $d\hat{f}_\alpha(\beta)(t) = df_{\alpha(t)}(\beta(t))$

**Observação:** Veja que  $\hat{f}$  leva  $\Lambda(M; x, y)$  em  $\Lambda(N; f(x), f(y))$ . A aplicação  $(M, f) \mapsto (H_1(I, M), \hat{f})$  é um funtor da categoria das  $C^{k+4}$ -variedades de dimensão finita na categoria das  $C^k$ -variedades de Hilbert.

**Definição 4.3.4.** Se  $M$  for uma  $C^{k+4}$ -variedade de dimensão finita definimos a ação integral de  $M$  por

$$\tilde{L}(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^1 \|\alpha'(t)\|^2 dt$$

para  $\alpha \in H_1(I, M)$ .

**Proposição 4.3.9.** Considere uma  $C^{k+4}$ -isometria local  $f:M \rightarrow N$ . Então  $\tilde{L}_M = \tilde{L}_N \circ \hat{f}$ .

**Dem.:**  $\hat{f}(\alpha)'(t) = (f \circ \alpha)'(t) = df_{\alpha(t)}(\alpha'(t))$ . Como  $df_{\alpha(t)}$  é uma isometria segue que  $\|\hat{f}(\alpha)'(t)\| = \|\alpha'(t)\|$ . □

**Corolário 4.3.9.1.** Se  $M$  é subvariedade de  $N$   $\tilde{L}_M = \tilde{L}_N|_{H_1(I, M)}$ .

**Corolário 4.3.9.2.** Se  $M$  for subvariedade fechada de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{L}(\alpha) = \frac{1}{2} \|D\alpha\|_0^2$  é  $C^k$ .

**Corolário 4.3.9.3.** Se  $M$  for uma  $C^{k+4}$ -variedade completa de dimensão finita,  $\tilde{L}$  é  $C^k$ .

**Dem.:** Basta mergulhar  $M$  isometricamente em algum  $\mathbb{R}^n$ , o que é possível por um teorema de Nash.

Se  $N \subset M$  é uma subvariedade fechada sendo  $M$  completa e considerarmos em  $N$  a estrutura riemanniana induzida de  $M$ , dados  $x, y \in N$  temos naturalmente que  $\rho_N(x, y) \geq \rho_M(x, y)$ . Logo, se  $\{x_n\}$  for uma sequência de Cauchy em  $N$ ,  $\{x_n\}$  converge em  $M$  e, consequentemente em  $N$ , pois  $N$  é fechada. Ou seja,  $N$  também é completa. Isto nos leva à

**Proposição 4.3.10.** Se  $M$  for uma subvariedade  $C^{k+4}$ ,  $k \geq 1$ , de  $\mathbb{R}^n$  temos que  $H_1(I, M)$  é uma  $C^k$ -subvariedade completa de  $H_1(I, \mathbb{R}^n)$ .

**Proposição 4.3.11.** Se  $M$  é uma  $C^{k+4}$ -subvariedade de  $\mathbb{R}^n$  e  $x, y \in M$ , o conjunto  $\Lambda(M; x, y)$  é uma translação de  $H_1^*(I, \mathbb{R}^n)$  e  $\Lambda(M; x, y)_\alpha \subset H_1^*(I, \mathbb{R}^n)$

**Dem.:** A segunda afirmação segue direto da definição de  $\Lambda(M; x, y)_\alpha$ . Agora se  $\alpha, \beta \in \Lambda(M; x, y)$  temos  $(\alpha - \beta)(0) = (\alpha - \beta)(1) = 0$  de onde segue a primeira afirmação. □

**Corolário 4.3.11.1.** Se olharmos  $\Lambda(M; x, y)$  como subvariedade de  $H_1(I, \mathbb{R}^n)$ , o produto interno  $\langle, \rangle_\alpha$  em  $\Lambda(M; x, y)_\alpha$  é dado por  $\langle \beta, \gamma \rangle_\alpha = \langle D\beta, \gamma \rangle_0$ .

**Corolário 4.3.11.2.** Seja  $S$  subconjunto de  $\Lambda(M; x, y)$  onde  $\tilde{L}_M$  é limitado. Então  $S$  é totalmente limitado em  $C^0(I, \mathbb{R}^n)$  e em  $H_0(I, \mathbb{R}^n)$ .

**Dem.:**  $\tilde{L}_M(\alpha) = \frac{1}{2}\|D\alpha\|_0^2$ , logo  $\|D\alpha\|$  é limitado em S. Como  $\Lambda(M; x, y)$  é um transladado de  $H_1^*(I, \mathbb{R}^n)$  e D é uma isometria ali, segue que S é limitado em  $H_1(I, \mathbb{R}^n)$ . Agora o resultado segue pelos corolários da desigualdade de Sobolev. □

**Corolário 4.3.11.3.** Se  $\{\alpha_i\}$  for uma sequência em  $\Lambda(M; x, y)$  com  $\|D(\alpha_i - \alpha_j)\|_0 \rightarrow 0$  quando  $i, j \rightarrow \infty$ , ela converge em  $\Lambda(M; x, y)$ .

**Dem.:** Como  $\alpha_i - \alpha_j \in H_1^*(I, \mathbb{R}^n)$  segue que  $\{\alpha_i\}$  é de Cauchy em  $H_1(I, \mathbb{R}^n)$ . Mas  $\Lambda(M; x, y)$  é fechada em  $H_1(I, \mathbb{R}^n)$ . □

**Definição 4.3.5.** Se  $\alpha \in \Lambda(M; x, y)$  definimos  $\alpha^h$  como sendo a projeção ortogonal de  $D\alpha$  no complemento ortogonal de  $D(\Lambda(M; x, y)_\alpha)$  em  $H_0(I, \mathbb{R}^n)$ .

**Proposição 4.3.12.** Seja M uma  $C^{k+4}$ -subvariedade de  $\mathbb{R}^n$  e considere  $\tilde{L}$  a restrição de  $\tilde{L}_M$  a  $\Lambda(M; x, y)$ . Olhando para  $\Lambda(M; x, y)$  como subvariedade riemanniana fechada de  $H_1(I, \mathbb{R}^n)$ , para cada  $\alpha \in \Lambda(M; x, y)$  podemos caracterizar  $\nabla \tilde{L}(\alpha)$  como sendo o único elemento de  $\Lambda(M; x, y)_\alpha$  que é levado por D em  $D\alpha - \alpha^h$ . Além disso,  $\|\nabla \tilde{L}(\alpha)\|_\alpha = \|D\alpha - \alpha^h\|_0$ .

**Dem.:** Como  $\Lambda(M; x, y)$  é fechado em  $H_1(I, \mathbb{R}^n)$  e está incluído em  $H_1^*(I, \mathbb{R}^n)$ , segue da proposição 4.3.1 que D leva  $\Lambda(M; x, y)_\alpha$  isometricamente em um subespaço fechado de  $H_0(I, \mathbb{R}^n)$ . Assim, como  $D\alpha - \alpha^h$  é ortogonal ao complemento ortogonal de  $D(\Lambda(M; x, y)_\alpha)$ , é da forma  $D\beta$  para alguma  $\beta \in \Lambda(M; x, y)_\alpha$  e, como D é uma isometria em  $\Lambda(M; x, y)_\alpha$ ,  $\beta$  é única e  $\|\beta\|_\alpha = \|D\beta\|_0 = \|D\alpha - \alpha^h\|_0$ . Então será suficiente provar que  $d\tilde{L}_\alpha \rho = \langle \beta, \rho \rangle_\alpha$  onde  $\rho \in \Lambda(M; x, y)_\alpha$ , ou ainda, pelo corolário 4.3.11.1, que  $d\tilde{L}_\alpha \rho = \langle D\beta, D\rho \rangle_0 = \langle D\alpha - \alpha^h, D\rho \rangle_0$ . Mas, pela definição de  $\alpha^h$ , temos  $\langle \alpha^h, D\rho \rangle_0 = 0$ . Agora  $\tilde{L}_{\mathbb{R}^n}(\gamma) = \frac{1}{2}\|\gamma\|_0^2 \Rightarrow d\tilde{L}_{\mathbb{R}^n}(\alpha)\rho = \langle D\alpha, D\rho \rangle_0$  para  $\rho \in H_1(I, \mathbb{R}^n)$ . Como  $\tilde{L}$  é a restrição de  $\tilde{L}_{\mathbb{R}^n}$  a  $\Lambda(M; x, y)$  estamos feitos. □

**Definição 4.3.6.** Denotemos por  $P(x)$ ,  $P: M \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , a projeção ortogonal de  $\mathbb{R}^n$  em  $T_x M$ . P é uma aplicação  $C^{k+3}$ . Se  $\overline{\Lambda}(M; x, y)_\alpha$  for o fecho de  $\Lambda(M; x, y)_\alpha$  em  $H_0(I, \mathbb{R}^n)$ , denotaremos por  $P_\alpha$  a projeção ortogonal de  $H_0(I, \mathbb{R}^n)$  em  $\overline{\Lambda}(M; x, y)_\alpha$ .

**Proposição 4.3.13.** Se  $\alpha \in \Lambda(M; x, y)$ ,  $\overline{\Lambda}(M; x, y)_\alpha = \{\beta \in H_0(I, \mathbb{R}^n); \beta(t) \in T_{\alpha(t)} M \text{ q.t.p.}\}$ . Se  $\beta \in H_0(I, \mathbb{R}^n)$ ,  $P_\alpha(\beta)(t) = P(\alpha(t))\beta(t)$ .

**Dem.:** Defina a seguinte aplicação linear em  $H_0(I, \mathbb{R}^n)$ ,  $\pi_\alpha \beta(t) = P(\alpha(t))\beta(t)$ . Como para cada t  $P(\alpha(t))$  é uma projeção ortogonal, segue-se que  $\pi_\alpha$  é uma projeção ortogonal diretamente da definição do produto interno  $\langle, \rangle_0$ . Pela proposição 4.3.8 segue que  $\pi_\alpha$  leva  $H_1^*(I, \mathbb{R}^n)$  sobre  $\Lambda(M; x, y)_\alpha$ , mas  $H_1^*(I, \mathbb{R}^n)$  é denso em  $H_0(I, \mathbb{R}^n) \Rightarrow \pi_\alpha = P_\alpha$ . Agora  $\beta \in H_0(I, \mathbb{R}^n)$  é ponto fixo se, e somente se,  $\beta(t) \in T_{\alpha(t)} M$  q.t.p.. □

**Corolário 4.3.13.1.** Para  $\alpha \in \Lambda(M; x, y)$  temos  $P_\alpha(H_1(I, \mathbb{R}^n)) = H_1(I, M)_\alpha$  e  $P_\alpha(H_1^*(I, \mathbb{R}^n)) = \Lambda(M; x, y)_\alpha$ .

**Corolário 4.3.13.2.**  $\langle \alpha^h, DP_\alpha \beta \rangle = 0$  para  $\beta \in H_1^*(I, \mathbb{R}^n)$ .



**Corolário 4.3.13.3.**  $P_\alpha D\alpha = D\alpha$

**Dem.:** Pois  $(D\alpha)(t) = \alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}M$  sempre que existir  $\alpha'$ , então  $D\alpha \in \bar{\Lambda}(M; x, y)_\alpha$ .

**Lema 4.3.3.** Seja  $T \in H_0(I, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$  e defina para cada  $\alpha \in H_0(I, \mathbb{R}^n)$  uma função

$$\tilde{T}(\alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{por} \quad \tilde{T}(\alpha)(t) = T(t)\alpha(t)$$

Temos

1.  $\tilde{T}$  é um operador linear contínuo de  $H_0(I, \mathbb{R}^n)$  em  $L^1(I, \mathbb{R}^m)$ .
2. Se  $T, \alpha$  forem funções absolutamente contínuas,  $\tilde{T}(\alpha)$  e  $(\tilde{T}(\alpha))'$  também o são.
3. Se  $T \in H_1(I, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$  e  $\alpha \in H_1(I, \mathbb{R}^n)$ ,  $\tilde{T}(\alpha) \in H_1(I, \mathbb{R}^m)$ .

**Dem.:** Suponha  $n = m = 1$ . Então (1) é consequência imediata da desigualdade de Schwartz. (3) segue de (2) que por sua vez segue do fato que  $(\tilde{T}\alpha)'(t) = T'(t)\alpha(t) + T(t)\alpha'(t)$ . Em dimensão mais alta basta olhar coordenadas. □

Consideremos as funções  $G_\alpha \in H_1(I, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$  e  $Q_\alpha \in H_0(I, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$  dadas por  $G_\alpha = P \circ \alpha$  e  $Q_\alpha = G'_\alpha$ . Temos

**Proposição 4.3.14.** Sejam  $\alpha \in \Lambda(M; x, y)$  e  $\beta \in H_1(I, \mathbb{R}^n)$ . Então  $(DP_\alpha - P_\alpha D)\beta(t) = Q_\alpha(t)\beta(t)$ . Se  $f \in H_0(I, \mathbb{R}^n)$  defina

$$g(t) = \int_0^1 Q_\alpha(s)f(s) ds$$

Assim, se  $\beta \in H_1^*(I, \mathbb{R}^n)$  vale

$$\langle f, (DP_\alpha - P_\alpha D)\beta \rangle_0 = \langle g, -D\beta \rangle_0$$

**Dem.:** Como  $P_\alpha\beta(t) = G_\alpha(t)\beta(t)$  e  $P_\alpha(D\beta)(t) = G_\alpha(t)\beta'(t) \Rightarrow (DP_\alpha - P_\alpha D)\beta(t) = Q_\alpha(t)\beta(t)$  (lema 4.3.3). Também  $s \mapsto Q_\alpha(s)f(s)$  é somável de modo que  $g$  é absolutamente contínua. Agora observe que, como  $G_\alpha(t) = P(\alpha(t))$  é auto-adjunta para todo  $t$ ,  $Q_\alpha(t) = G'_\alpha(t)$  é auto-adjunta sempre que for definida, logo

$$\langle f, (DP_\alpha - P_\alpha D)\beta \rangle_0 = \int_0^1 \langle f(t), Q_\alpha(t)\beta(t) \rangle dt = \int_0^1 \langle Q_\alpha(t)f(t), \beta(t) \rangle dt = \int_0^1 \langle g'(t)\beta(t) \rangle dt$$

Assim, se  $\beta \in H_1^*(I, \mathbb{R}^n)$ , a proposição 4.3.2 diz que

$$\langle f, (DP_\alpha - P_\alpha D)\beta \rangle_0 = \langle g, -D\beta \rangle_0$$

□

**Proposição 4.3.15.**  $P_\alpha\alpha^h$  é absolutamente contínua e  $(P_\alpha\alpha^h)'(t) = Q_\alpha(t)\alpha^h(t)$ .

**Dem.:** Se  $\beta \in H_1^*(I, \mathbb{R}^n)$  temos

$$\langle P_\alpha\alpha^h, D\beta \rangle_0 = \langle \alpha^h, P_\alpha D\beta \rangle_0 = \langle \alpha^h, (P_\alpha D - DP_\alpha)\beta \rangle_0$$

pois  $\langle \alpha^h, DP_\alpha \beta \rangle = 0$ . Logo, pela proposição anterior,  $\langle P_\alpha \alpha^h, D\beta \rangle_0 = \langle g, D\beta \rangle_0$  onde  $g$  é

$$g(t) = \int_0^1 Q_\alpha(s) \alpha^h(s) ds$$

Então  $P_\alpha \alpha^h - g$  é ortogonal a  $D(H_1^*(I, \mathbb{R}^n))$  e a proposição 4.3.1 diz que  $P_\alpha \alpha^h - g$  é constante. Como  $g$  é absolutamente contínua,  $P_\alpha \alpha^h$  também o é e ambas têm a mesma derivada. Mas  $g'(t) = Q_\alpha(t) \alpha^h(t)$ . □

**Teorema 4.3.16.** Seja  $\alpha \in \Lambda(M; x, y)$  um ponto crítico de  $\tilde{L}_M$ . Então  $\alpha \in C^{k+4}(I, M)$  e  $\alpha''(t)$  é ortogonal a  $T_{\alpha(t)}M$  para todo  $t$ . Reciprocamente, se  $\alpha'$  for absolutamente contínua e  $\alpha''$  for ortogonal a  $M$  q.t.p., então  $\alpha$  é um ponto crítico de  $\tilde{L}$ .

**Dem.:** A proposição 4.3.12 nos diz que se  $\alpha$  for um ponto crítico de  $\tilde{L}$  então  $D\alpha = \alpha^h$ . Mas acabamos de ver que  $P_\alpha D\alpha = D\alpha \Rightarrow P_\alpha \alpha^h = \alpha^h$ . Logo  $\alpha'$  é absolutamente contínua, em particular  $\alpha$  é  $C^1$ , e

$$\alpha''(t) = Q_\alpha(t) \alpha'(t) \quad (4.3.1)$$

Agora,  $P$  é  $C^{k+3}$  e

$$Q_\alpha(t) = \frac{d}{dt} P(\alpha(t)) \quad (4.3.2)$$

Assim, se  $\alpha$  for  $C^m$ ,  $1 \leq m \leq k+3$ ,  $Q_\alpha(t)$  será  $C^{m-1}$  que junto com a equação (4.3.1) diz que  $\alpha''$  será  $C^{m+1}$ . Como já sabemos que  $\alpha$  é  $C^1$ , indutivamente obtemos que  $\alpha$  é  $C^{k+4}$ . Para  $\beta \in \Lambda(M; x, y)_\alpha$  temos que  $D\alpha = \alpha^h$  é ortogonal a  $D\beta$ . Como  $\Lambda(M; x, y)_\alpha \subset H_1^*(I, \mathbb{R}^n)$  obtemos que  $\alpha''$  é ortogonal a  $\beta$  através da proposição 4.3.2. Sendo  $\beta$  e  $\alpha''$  contínuas segue que  $\langle \beta(t), \alpha(t)'' \rangle \equiv 0$ . Agora, dado  $t \in (0, 1)$  e  $v \in T_{\alpha(t)}M$ , existe  $\beta \in \Lambda(M; x, y)_\alpha$  com  $\beta(t) = v$ . Novamente usando a continuidade de  $\alpha''$  obtemos a ortogonalidade de  $\alpha''$  em  $T_{\alpha(0)}M$  e  $T_{\alpha(1)}M$  também.

Reciprocamente, se  $\alpha \in \Lambda(M; x, y)$  for absolutamente contínua com  $\alpha''$  ortogonal a  $M$  q.t.p., a mesma proposição 4.3.2 nos diz que  $D\alpha$  é ortogonal a  $D(\Lambda(M; x, y)_\alpha) \Rightarrow D\alpha = \alpha^h$ . Agora é só usar a proposição 4.3.12 novamente para concluir que  $\alpha$  é ponto crítico de  $\tilde{L}$ . □

**Observação:** Um resultado da geometria diferencial diz que uma curva  $\alpha \in C^2(I, M)$  é uma geodésica para  $M$  se, e somente se,  $\alpha''$  for ortogonal a  $M$  q.t.p.. Em particular concluimos que  $\alpha \in \Lambda(M; x, y)$  é ponto crítico de  $\tilde{L} \Leftrightarrow$  for uma geodésica para  $M$ .

**Lema 4.3.4.** Seja  $A \subset M$  um subconjunto compacto. Então existe uma constante  $K$  tal que

$$\int_0^1 \|Q_\alpha(t) \beta(t)\| dt \leq K \|D\alpha\|_0 \|\beta\|_0 \quad \forall \alpha \in H_0(I, \mathbb{R}^n) \text{ com } \alpha(I) \subset A \text{ e } \beta \in H_1(I, \mathbb{R}^n)$$

**Dem.:** Considere o conjunto compacto  $A'$  de  $(\mathbb{R}^n)^3$  consistindo das triplas  $(x, v, z)$  com  $x \in A$ ,  $v \in T_x M$  unitário e  $\|z\| = 1$ . A aplicação  $(x, v, z) \mapsto \|dP_x(v)z\|$  é contínua em  $A'$  e portanto limitada por uma constante  $K$ . Mas  $Q_\alpha(t) = dP_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) \Rightarrow \|Q_\alpha(t) \beta(t)\| = \|dP_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) \beta(t)\| \leq K \|\alpha'(t)\| \|\beta(t)\|$ . Agora é só integrar e usar a desigualdade de Schwartz. □

**Teorema 4.3.17.** Suponha que  $S \subset \Lambda(M; x, y)$  seja tal que  $\tilde{L}$  seja limitado em  $S$  e  $\inf_S \|\nabla \tilde{L}\| = 0$ . Então existe um ponto crítico de  $\tilde{L}$  aderente a  $S$ , em outras palavras,  $\tilde{L}$  satisfaz a condição (C).

**Dem.:** Escolha sequência  $\{\alpha_i\} \in S$  com  $\|\nabla \tilde{L}(\alpha_i)\|_{\alpha_i} = \|D\alpha_i - \alpha_i^h\|_0 \xrightarrow{i} 0$ . Como  $P_{\alpha_i}$  é uma projeção, ela preserva decrescimento de norma; então, usando o corolário 4.3.13.3 obtemos que

$$\|P_{\alpha_i}(D\alpha_i - \alpha_i^h)\|_0 = \|D\alpha_i - P_{\alpha_i}\alpha_i^h\|_0 \xrightarrow{i} 0 \quad (4.3.3)$$

Além disso,  $S$  é totalmente limitado (corolário 4.3.11.2) e, assim sendo, podemos assumir que  $\|\alpha_i - \alpha_j\|_\infty \xrightarrow{i,j} 0$ . Se provarmos que  $\|D(\alpha_i - \alpha_j)\|_0 \rightarrow 0$  o resultado seguirá do corolário 4.3.11.3 e da continuidade de  $\nabla \tilde{L}$ .

Agora  $\|D(\alpha_i - \alpha_j)\|_0^2 = \langle D\alpha_i, D(\alpha_i - \alpha_j) \rangle_0 - \langle D\alpha_j, D(\alpha_i - \alpha_j) \rangle_0$ . Logo, basta mostrar que  $\langle D\alpha_i, D(\alpha_i - \alpha_j) \rangle_0 \rightarrow 0$ . Mas  $\|D\alpha_i\|_0^2 = 2\tilde{L}(\alpha_i)$  é limitado e, portanto, também é limitado  $\|D(\alpha_i - \alpha_j)\|_0$ . Assim, devido à equação (4.3.3), será suficiente verificarmos que de fato  $\langle P_{\alpha_i}\alpha_i^h, D(\alpha_i - \alpha_j) \rangle_0 \rightarrow 0$ . Então, usando as proposições 4.3.15 e 4.3.2 temos

$$|\langle P_{\alpha_i}\alpha_i^h, D(\alpha_i - \alpha_j) \rangle_0| = \left| \int_0^1 \langle Q_{\alpha_i}(t)\alpha_i^h(t), \alpha_i - \alpha_j \rangle_0 dt \right| \leq \|\alpha_i - \alpha_j\|_\infty \int_0^1 \|Q_{\alpha_i}(t)\alpha_i^h(t)\| dt$$

e então basta mostrar que  $\int_0^1 \|Q_{\alpha_i}(t)\alpha_i^h(t)\| dt$  é limitada. Seja  $A$  um compacto tal que  $\alpha_i(I) \subset A \forall i$ . Pelo último lema existe uma constante  $K$  com

$$\int_0^1 \|Q_{\alpha_i}(t)\alpha_i^h(t)\| dt \leq K \|D\alpha_i\|_0 \|\alpha_i^h\|_0$$

Como  $\|D\alpha_i\|_0$  é limitada assim como  $\|\alpha_i^h\|_0$  (devido à equação (4.3.3)), estamos feitos. □

## 4.4 Desigualdades de Morse

**Proposição 4.4.1.** Sejam  $M$  uma variedade conexa  $C^1$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^1$  não constante. Se  $K$  for o conjunto dos pontos críticos de  $f$  tem-se  $f(K) = f(\partial K)$ .

**Dem.:** Tome  $y \in K$  e escolha  $x \in M$  regular tal que  $f(y) \neq f(x)$ . Considere também uma curva  $C^1$  ligando  $y$  a  $x$ , digamos  $\alpha$ , e defina  $g(t) = f(\alpha(t))$ . Como  $g$  não é constante,  $g'(t) = df_{\alpha(t)}\alpha'(t)$  não é identicamente nula, logo a imagem de  $\alpha$  não está contida em  $K$ . Seja  $t_0 = \inf\{t; \alpha(t) \notin K\}$ . É claro então que  $\alpha(t_0) \in \partial K$  e, como  $g'(t) = 0$  se  $t \leq t_0$ ,  $f(y) = f(\alpha(t_0))$ . □

**Proposição 4.4.2.** Se  $f$  é uma função real  $C^1$  numa variedade riemanniana  $C^1$   $M$  que satisfaz a condição (C) e  $K$  é o conjunto dos pontos críticos de  $f$ ,  $f|_{\partial K}$  é própria.

**Dem.:** Tome  $a \leq b \in \mathbb{R}$  e uma sequência  $\{x_n\} \subset \partial K$  com  $a \leq f(x_n) \leq b$ . Queremos provar que  $\{x_n\}$  possui subsequência convergente. Escolha uma sequência  $\{y_n\} \subset M \setminus K$  tal que

$$\rho(x_n, y_n) \leq 1/n \quad \|\nabla f(y_n)\| \leq 1/n \quad a - 1 < f(y_n) < b + 1$$

onde  $\rho$  é métrica de  $M$ . Pela condição (C) existe subsequência de  $\{y_n\}$  que converge para um ponto crítico de  $f$ , mas então a subsequência correspondente de  $\{x_n\}$  também convergirá.  $\square$

**Observação:** No caso de pontos críticos não degenerados temos  $K = \partial K$ . Vale a pena observar que a proposição 4.4.2 também vale para  $f|_K$  que no caso de pontos críticos não degenerados não faz a mínima diferença. Porém, como no capítulo 6 estaremos trabalhando com pontos críticos possivelmente degenerados e, portanto, não necessariamente isolados, já deixamos estes resultados preparados aqui.

**Proposição 4.4.3.** Sejam  $M$  uma  $C^2$ -variedade riemanniana conexa e completa e  $f$ , também  $C^2$ , uma função real em  $M$  satisfazendo (C). Se  $f$  for limitada inferiormente ela assume seu mínimo.

**Dem.:** Seja  $\delta$  o ínfimo de  $f$ . Dado  $\varepsilon > 0$  escolha  $x \in M$  com  $f(x) < \delta + \varepsilon$  e considere uma curva integral maximal de  $\nabla f$  por  $x$ ,  $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ . De acordo com a proposição 4.2.2,  $a = -\infty$  e  $\alpha$  tem um ponto crítico de  $f$  como ponto de acumulação quando  $t \rightarrow a$ . Chame  $y$  tal ponto crítico. Como  $f \circ \alpha$  é não decrescente segue que  $f(y) < \delta + \varepsilon$ . Suponha sem perda de generalidade que  $f$  é não constante (se for, não há nada a fazer), então existe  $z \in \partial K$  com  $f(z) = f(y)$ .

Usando este argumento, encontre sequência  $\{z_n\} \in \partial K$  tal que  $\delta \leq f(z_n) \leq \delta + 1/n$ . Sendo  $f$  própria se restrita a  $\partial K$ , teremos subsequência de  $\{z_n\}$  convergindo para um ponto  $z_0 \in \partial K$ . Obviamente  $f(z_0) = \delta$ .  $\square$

**Corolário 4.4.3.1.** Suponha que  $M$  não seja conexa. Se  $K$  tiver interior vazio  $f$  assume seu limite inferior.

**Dem.:** Ache, em cada componente conexa de  $M$ , um ponto de  $K = \partial K$  onde  $f$  assume seu mínimo. Agora monte com estes pontos uma sequência  $\{x_n\}$  tal que  $\delta \leq f(x_n) \leq \delta + 1/n$ . Novamente teremos subsequência convergente.  $\square$

**Corolário 4.4.3.2.** Se  $M$  for  $C^6$ -variedade riemanniana completa a ação integral  $\tilde{L}$  assume seu ínfimo em cada componente conexa de  $\Lambda(M; x, y)$  assim como em  $\Lambda(M; x, y)$ .

**Dem.:** A condição (C) é satisfeita e os pontos críticos de  $\tilde{L}|_{\Lambda(M; x, y)}$  são geodésicas. Agora é fácil obter elementos de  $\Lambda(M; x, y)$  não parametrizados proporcionalmente ao comprimento de arco e arbitrariamente próximos de um ponto crítico apenas fazendo pequenas variações no parâmetro. Logo o conjunto dos pontos críticos tem interior vazio.  $\square$

**Teorema 4.4.4.** Dada uma  $C^6$ -variedade riemanniana completa e uma classe de homotopia de caminhos ligando  $x$  a  $y$  em  $M$ , existe uma geodésica nesta classe cujo comprimento é menor ou igual ao de qualquer caminho absolutamente contínuo ligando  $x$  e  $y$  na mesma classe. De fato, existe uma geodésica cujo comprimento é  $\rho(x, y)$ .

**Dem.:** Dado um caminho absolutamente contínuo  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  ligando  $x$  e  $y$ , a desigualdade de Schwarz nos diz que  $L(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha'\| \leq \sqrt{2\tilde{L}(\alpha)}$ . Além disso, a igualdade ocorrerá se, e somente se,  $\|\alpha'\|$  for constante. Por outro lado, sempre podemos reparametrizar  $\alpha$  proporcionalmente ao

comprimento de arco obtendo  $\sigma \in \Lambda(M; x, y)$ . Como o comprimento e a classe de homotopia não mudam com reparametrizações vemos que, se  $\tilde{L}$  assumir seu ínfimo numa geodésica  $\sigma$ , então, entre todos os caminhos absolutamente contínuos ligando  $x$  e  $y$  na mesma classe de homotopia de  $\sigma$ ,  $\sigma$  terá o menor comprimento.  $\square$

**Definição 4.4.1.** Dado um par de espaços topológicos  $(X, Y)$ , diremos que o par é admissível se  $H_k(X, Y)$  tiver dimensão finita e, a menos de um número finito de índices,  $H_k(X, Y) = 0$ , onde  $H_*$  é o funtor de homologia sobre um corpo  $\mathbb{K}$ .

**Observação:** Dada uma trinca de espaços, é consequência imediata da sequência exata longa de homologia da trica que, se  $(X, Y)$  e  $(Y, Z)$  forem pares admissíveis, então  $(X, Z)$  também é.

**Definição 4.4.2.** Uma função inteira  $S$  sobre pares admissíveis de espaços é dita sub-aditiva se  $S(X, Z) \leq S(X, Y) + S(Y, Z)$ . Se valer a igualdade sempre diremos que  $S$  é aditiva.

**Observação:** É claro que se  $X_0 \subset \cdots \subset X_n$ ,  $(X_i, X_{i-1})$  for admissível e  $S$  for subaditiva teremos  $S(X_n, X_0) \leq \sum S(X_i, X_{i-1})$  e a igualdade valerá caso  $S$  seja aditiva.

**Definição 4.4.3.** Para cada inteiro  $k$  e par admissível de espaços definimos

$$R_k(X, Y) = \dim H_k(X, Y) \quad S_k(X, Y) = \sum_{m \leq k} (-1)^{k-m} R_m(X, Y) \quad \chi(X, Y) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m R_m(X, Y)$$

$\chi$  é chamada de característica de Euler do par  $(X, Y)$ .

**Lema 4.4.1.**  $R_k$  e  $S_k$  são subaditivas enquanto  $\chi$  é aditiva.

**Dem.:** Tome uma trinca de espaços  $(X, Y, Z)$  tal que  $(X, Y)$  e  $(Y, Z)$  sejam admissíveis. Da sequência exata longa de homologia da trinca

$$\cdots \rightarrow H_m(Y, Z) \xrightarrow{i_m} H_m(X, Z) \xrightarrow{j_m} H_m(X, Y) \xrightarrow{\partial_m} H_{m-1}(Y, Z) \rightarrow \cdots$$

obtemos as 3 sequências exatas curtas

$$0 \rightarrow \mathcal{I}m(\partial_{m+1}) \rightarrow H_m(Y, Z) \rightarrow \mathcal{I}m(i_m) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{I}m(i_m) \rightarrow H_m(X, Z) \rightarrow \mathcal{I}m(j_m) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{I}m(j_m) \rightarrow H_m(X, Y) \rightarrow \mathcal{I}m(\partial_m) \rightarrow 0$$

de onde

$$R_m(Y, Z) = \dim \mathcal{I}m(\partial_{m+1}) + \dim \mathcal{I}m(i_m) \quad R_m(X, Z) = \dim \mathcal{I}m(j_m) + \dim \mathcal{I}m(i_m)$$

$$R_m(X, Y) = \dim \mathcal{I}m(\partial_m) + \dim \mathcal{I}m(j_m)$$

e consequentemente

$$R_m(X, Z) - R_m(X, Y) - R_m(Y, Z) = -\left(\dim \mathcal{I}m(\partial_m) + \dim \mathcal{I}m(\partial_{m+1})\right) \quad (*)$$

Multiplicando (\*) por  $(-1)^{k-m}$  e somando sobre  $m$  de 0 a  $k$  chegamos em

$$S_k(X, Z) - S_k(X, Y) - S_k(Y, Z) = (-1)^{k+1} \dim \mathcal{I}m(\partial_0) - \dim \mathcal{I}m(\partial_{k+1})$$

que é negativo pois  $\partial_0 = 0$ . Analogamente, multiplicando (\*) por  $(-1)^m$  e somando para  $m \in \mathbb{N}$  obtemos

$$\chi(X, Z) - \chi(X, Y) - \chi(Y, Z) = 0$$

já que  $\partial_{k+1} = 0$  para  $k$  suficientemente grande. □

Considere então uma  $C^2$ -variedade riemanniana completa  $M$  e uma função real  $f \in C^1$  satisfazendo a condição **(C)** e com pontos críticos não degenerados. Escolha  $-\infty < a < b < \infty$  valores regulares de  $f$  e sejam  $c_1 < \dots < c_n$  os valores críticos de  $f$  em  $[a, b]$ . Escolha também  $a_i$ 's com  $a = a_0 < c_1 < a_1 < \dots < c_n < a_n = b$  e defina  $X_i = M_{a_i}$ . Segundo o corolário 4.2.6.1 os pares  $(X_i, X_{i-1})$  são admissíveis e o número de pontos críticos de índice  $k$  no nível  $c_i$  é dado por  $R_k(X_{i+1}, X_i)$ .

**Teorema 4.4.5. (Desigualdades de Morse) :** Usando a notação do parágrafo acima, seja  $C_m$  o número de pontos críticos de índice  $m$  de  $f$  em  $f^{-1}([a, b])$  e  $R_m$  o  $m$ -ésimo número de Betti de  $(M_b, M_a)$ . Temos as seguintes relações

$$\sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} R_m \leq \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} C_m \quad R_m \leq C_m \quad \chi(M_b, M_a) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m R_m = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m C_m$$

**Dem.:** Basta ver que

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} R_m &= S_k(M_b, M_a) \leq \sum_{i=0}^{n-1} S_k(X_{i+1}, X_i) = \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} C_m \\ \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m R_m &= \chi(M_b, M_a) = \sum_{i=0}^{n-1} \chi(X_{i+1}, X_i) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m C_m \end{aligned}$$

□

**Corolário 4.4.5.1.** Se  $f$  for limitada inferiormente as relações acima continuam válidas para  $R_m$  o  $m$ -ésimo número de Betti de  $M_b$  e  $C_m$  o número de pontos críticos de índice  $m$  de  $f$  em  $M_b$ .

**Dem.:** Basta tomar  $a$  menor que o ínfimo de  $f$ .

**Corolário 4.4.5.2.** Se  $f$  for limitada inferiormente,  $R_m^*$  for o  $m^o$  número de Betti de  $M$  e  $C_m^*$  for o número total de pontos críticos de índice  $m$  de  $f$  temos  $R_m^* \leq C_m^*$ .

**Dem.:** Só é preciso mostrar o caso  $C_m^* < \infty$ . Pelo corolário anterior temos  $R_m(M_b) \leq C_m^*$  para todo valor regular  $b$ . Assim é suficiente provar que, se  $R_m^* \geq k \Rightarrow R_m(M_b) \geq k$  para algum  $b$ . Sejam  $h_1, \dots, h_k$  elementos L.I. de  $H_m(M)$  e  $z_1, \dots, z_k$  ciclos (singulares) que os representam. Seja  $C$  um subconjunto compacto de  $M$  que contem o suporte dos  $z_i$ . Então, à medida que  $b \rightarrow \infty$  percorrendo os valores regulares de  $f$ , os interiores de  $M_b$  formam uma família crescente de abertos que cobrem  $M$ . Logo  $C \subset M_b$  para algum  $b$  e  $z_1, \dots, z_k$  são ciclos em  $M_b$ . Além disso, nenhuma combinação linear não trivial deles pode ser homóloga a zero em  $M_b$  (caso contrário seria homóloga a zero também em  $M$ ), consequentemente  $R_m(M_b) \geq k$ . □

## 5 Teoria de Lusternik-Schnirelman

### 5.1 Variedades de Finsler

**Definição 5.1.1.** Dada uma  $C^{k+1}$ -variedade  $M$  e um espaço de Banach  $\mathbb{F}$ , considere uma  $C^k$ -fibrção  $\mathcal{M}$  com fibra  $\mathbb{F}$ . Uma função  $\|\cdot\| : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita uma estrutura de Finsler para  $\mathcal{M}$  se, para cada  $x \in M$  fixo, a aplicação  $(x, v) \mapsto \|(x, v)\|$  for uma norma equivalente à de  $\mathbb{F}$  (denote-a por  $\|v\|_x$ ) e se, para cada  $x \in M$  e  $k > 1$ , existir vizinhança  $U_x$  tal que  $\frac{1}{k}\|v\|_x \leq \|v\|_y \leq k\|v\|_x$  para todo  $y \in U_x$ . Se  $N$  for uma norma compatível com a de  $\mathbb{F}$ , a função  $(x, v) \mapsto N(v)$  é chamada de estrutura de Finsler plana.

**Observações:**

- Uma estrutura de Finsler é claramente contínua
- Equivalência entre fibrações “transporta” a estrutura de Finsler
- Se  $\mathcal{M}_1$  e  $\mathcal{M}_2$  forem fibrações sobre  $M$  com fibras  $\mathbb{F}_1$  e  $\mathbb{F}_2$  e  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  forem estruturas de Finsler, construímos uma estrutura de Finsler em  $L(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$  (que é a fibração induzida sobre  $M$  com fibra  $L(\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2)$ ) através da função  $\|(x, T)\| = \sup\{\|(x, Tv)\|_2; \|(x, v)\|_1 = 1\}$ . Consequentemente temos a estrutura de Finsler para o dual  $\mathcal{M}'$  (fibra  $\mathbb{F}'$ ) dada por  $\|(x, l)\| = \sup\{|l(v)|; \|(x, v)\| = 1\}$
- Sejam  $p : \mathcal{M} \rightarrow M$  uma fibração e  $\{O_i, i \in \mathcal{I}\}$  uma cobertura aberta de  $M$  com estruturas de Finsler  $\|\cdot\|_i$  para  $p^{-1}(O_i)$ . Se  $\{\varphi_j, j \in \mathcal{J}\}$  for partição da unidade dominada por  $\{O_i\}$  (diga  $\text{supp}(\varphi_j) \subset O_{i(j)}$ ), então  $\sum_{\mathcal{J}}(\varphi_j \circ p)\|\cdot\|_{i(j)}$  é estrutura de Finsler para  $\mathcal{M}$
- Toda fibração sobre uma variedade paracompacta admite uma estrutura de Finsler

**Definição 5.1.2.** Uma variedade de Finsler é uma  $C^1$ -variedade com uma estrutura de Finsler sobre o fibrado tangente.

**Observação:** Se  $(\cdot, \cdot)$  for uma estrutura riemanniana para  $M$  então  $\|e\|^2 = (e, e)$  define uma estrutura de Finsler em  $TM$  ( $e \in TM$ ).

Vamos agora olhar os conceitos métricos em uma variedade finsleriana.

**Lema 5.1.1.** Seja  $M$  uma  $C^k$ -variedade de Banach conexa e tome  $x, y \in M$ . Então existe uma curva  $C^k$ ,  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  com  $\sigma(a) = x$  e  $\sigma(b) = y$ .

**Dem.:** Defina  $x \sim y$  se o lema for verdade para  $x, y$ . Basta provar que  $\sim$  é uma relação de equivalência, pois então, cada classe de equivalência será aberta em  $M$  (todos os pontos numa carta ao redor de  $x$  serão equivalentes). Também são claras as propriedades de reflexividade e simetria de  $\sim$ . Então, sejam  $\sigma_1 : [0, 1/2] \rightarrow M$  e  $\sigma_2 : [1/2, 1] \rightarrow M$  com  $\sigma_1(1/2) = \sigma_2(1/2)$ . Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^\infty$  não decrescente com  $f(0)=0$ ,  $f(1)=1$  e  $f(t)=1/2$  se  $1/4 \leq t \leq 3/4$ . Defina  $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$  por  $\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_1(f(t)) & , \text{ se } 0 \leq t \leq 3/4 \\ \sigma_2(f(t)) & , \text{ se } 1/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$

□

**Definição 5.1.3.** Dada uma variedade de Finsler  $M$  e uma curva  $C^1$ ,  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  definimos o comprimento de  $\alpha$ ,  $L(\alpha)$ , por

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Se  $x, y$  estão na mesma componente conexa de  $M$  definimos a distância entre  $x$  e  $y$  por

$$\rho(x, y) = \inf\{L(\alpha); \alpha \text{ } C^1 \text{ ligando } x \text{ a } y\}$$

**Observação:** Observe que a função  $t \mapsto \|\alpha'(t)\|$  é contínua e, portanto,  $L(\alpha)$  é um número real não negativo bem definido e invariante por reparametrizações. Que  $\rho(x, y)$  é um número não negativo bem definido está claro pelo lema 5.1.1.

**Teorema 5.1.1.** A função  $\rho$  acima define uma métrica em cada componente conexa de  $M$  que é compatível com a topologia de  $M$  e, portanto, é chamada de métrica de Finsler para  $M$ .

**Dem.:** Que  $\rho$  é não negativa e simétrica está claro. Pela trivialidade local de  $TM$ , podemos considerar uma carta  $(U, \varphi)$  ao redor de  $x \in M$  ( $\varphi^{-1}(x) = 0$ ) e identificar  $TM|_{\varphi(U)}$  com  $U \times \mathbb{F}$  sendo que, para cada  $u \in U$ ,  $\|\cdot\|_{\varphi(u)}$  é uma norma admissível em  $\mathbb{F}$ . Dados  $r > 0$  suficientemente pequeno e  $k > 1$ , podemos supor  $U = \{v \in \mathbb{F}; \|v\|_x < 2r\}$  e  $\frac{1}{k}\|v\|_x \leq \|v\|_{\varphi(u)} \leq k\|v\|_x$  para  $u \in U$ . Assim, se  $\alpha$  é uma curva  $C^1$  em  $\varphi(U) \equiv U$  começando em 0 temos

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|_{\alpha(t)} dt \geq \frac{1}{k} \int_a^b \|\alpha'(t)\|_x dt \geq \frac{1}{k} \left\| \int_a^b \alpha'(t) dt \right\|_x \geq \frac{1}{k} \|\alpha(a) - \alpha(b)\|_x = \|\alpha(b)\|_x$$

Se  $\alpha$  sair de  $U$ , existe um menor  $c \in [a, b]$  com  $\|\alpha(c)\|_x = r$ , e então  $\alpha_c = \alpha|_{[a, c]}$  é uma curva em  $\varphi(U)$  e  $L(\alpha) \geq L(\alpha_c) \geq \frac{1}{k} \|\alpha(a) - \alpha(c)\|_x \geq \frac{r}{k}$ . Logo, se  $\alpha$  liga  $x$  a  $y$  e  $\alpha$  sair de  $U$ ,  $L(\alpha) \geq \frac{r}{k}$  e se  $\alpha$  permanecer em  $U$ ,  $L(\alpha) \geq \frac{\|y\|_x}{k}$ . Ou seja, se  $y \neq x$ ,  $\rho(x, y) \geq \frac{1}{k} \min\{r, \|y\|_x\}$  o que prova que  $\rho$  é uma métrica em cada componente de  $M$ .

Agora, considere sequência  $(y_n)$  tal que  $\rho(x, y_n) \rightarrow 0$ . Em particular  $\|y_n\|_x \rightarrow 0$  e, como  $\|\cdot\|_x$  é uma norma admissível em  $\mathbb{F}$ ,  $y_n \rightarrow x$ . Reciprocamente, se  $y_n \rightarrow x$ , temos  $\|y_n\|_x \rightarrow 0$ . Definindo  $\alpha_n : [0, 1] \rightarrow U$  por  $\alpha_n(t) = ty_n$  temos

$$\rho(x, y_n) \leq L(\alpha_n) = \int_0^1 \|y_n\|_{\alpha_n(t)} dt \leq k \int_0^1 \|y_n\|_x dt = k\|y_n\|_x$$

e  $\rho(x, y_n) \rightarrow 0$ .

□

**Observação:** Se cada componente de  $M$  for completa na métrica de Finsler,  $M$  é dita uma variedade de Finsler completa.

**Corolário 5.1.1.1.** Toda variedade de Banach paracompacta é metrizável.

**Proposição 5.1.2.** Se  $M$  é uma variedade de Finsler e  $N$  é uma subvariedade  $C^1$  de  $M$  então  $\|\cdot\|_{TN}$  define uma estrutura de Finsler em  $N$  (chamada de estrutura induzida). Se  $M$  for completa e  $N$  for fechada em  $M$  então  $N$  é completa na métrica induzida.



Se  $M$  é uma variedade de Finsler  $C^1$  e  $\alpha : (a, b) \rightarrow M$  uma curva  $C^1$  em  $M$  definimos o comprimento de  $\alpha$  por

$$L(\alpha) = \lim_{\substack{r \rightarrow a \\ s \rightarrow b}} \int_r^s \|\alpha'(t)\| dt$$

**Proposição 5.1.3.** Sejam  $M$  e  $\alpha$  como acima e suponha que  $L(\alpha)$  seja finito. Então a imagem de  $\alpha$  é totalmente limitada e, se  $M$  for completa, tem fecho compacto.

**Dem.:** Análoga à da seção 3.3.

**Teorema 5.1.4.** Seja  $X$  um campo de vetores  $C^1$  definido numa subvariedade aberta  $N \subset M$  onde  $M$  é uma variedade de Finsler  $C^2$  completa. Suponha que  $\alpha : (a, b) \rightarrow N$  seja uma curva integral maximal de  $X$  e que  $b < \infty$  assim como  $\int_0^b \|X(\alpha(t))\| dt$ . Então  $\alpha(t)$  tem um ponto de acumulação em  $M \setminus N$  quando  $t \rightarrow b$ .

**Dem.:** Da proposição anterior sabemos que se  $\int_0^b \|X(\alpha(t))\| dt < \infty$  a curva tem um ponto de acumulação  $x$  em  $M$ . Mas se  $b < \infty$  a proposição 3.2.3 nos conta que  $x \notin N$ . □

**Corolário 5.1.4.1.** Se  $N=M$  e  $X$  for limitado, qualquer curva integral de  $X$  está definida em  $\mathbb{R}$ .

Se  $M$  é uma variedade de Finsler temos também uma estrutura de Finsler para  $T^*M$  de forma natural dada por  $\|l\| = \sup\{|l(v)|; \|v\|_x = 1\}$  para  $l \in T_x^*M$  e  $v \in T_xM$ . Em particular, se  $f:M \rightarrow \mathbb{R}$  é  $C^1$  e  $x \in M$  temos definida  $\|df_x\|$ . Mais ainda,  $\|df_x\| : M \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua.

**Definição 5.1.4.** Sejam  $M$  uma variedade de Finsler,  $x \in M$  e  $f:M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $x$ . Dizemos que  $X(x) \in T_xM$  é um pseudo-gradiente para  $f$  em  $x$  se

1.  $\|X(x)\| \leq 2\|df_x\|$
2.  $X(x)f := df_x(X(x)) \geq \|df_x\|^2$

Se  $X$  for um  $C^k$ -campo de vetores em  $N \subset M$ ,  $X$  será dito um  $C^k$ -pseudo-gradiente para  $f$  em  $N$  se o for em cada ponto de  $N$ .

**Observações:** É evidente que se  $M$  for variedade riemanniana o gradiente de  $f$  será um pseudo-gradiente. O conjunto dos pseudo-gradientes para  $f$  em  $x$  é um conjunto convexo de  $T_xM$ . Se  $x$  for um ponto crítico de  $f$  então o único pseudo-gradiente de  $f$  em  $x$  é o zero.

Se  $x$  não for um ponto crítico para  $f$  escolha  $u \in T_xM$  com  $\|u\| = 1$  de modo que para todo  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $df_x(u) \geq (1-\varepsilon)\|df_x\|$ . Seja  $\delta > 0$  e defina  $X(x) = \frac{1+\delta}{1-\varepsilon}\|df_x\|u$ . Então  $\|X(x)\| = \frac{1+\delta}{1-\varepsilon}\|df_x\|$  e  $X(x)f = \frac{1+\delta}{1-\varepsilon}\|df_x\|df_x(u) \geq (1+\delta)\|df_x\|^2$ . Assim podemos ter  $\|X\|$  tão perto quanto quisermos de  $\|df\|$  e ainda termos  $Xf > \|df\|^2$ .

**Lema 5.1.2.** Se  $M$  for variedade de Finsler  $C^{k+1}$ ,  $k \geq 0$ ,  $f$  for  $C^1$  e  $x$  um ponto regular de  $f$ , existem uma vizinhança  $O$  de  $x$  em  $M$  e um  $C^k$ -pseudo-gradiente para  $f$  em  $O$ .

**Dem.:** Como observado acima, escolha  $X(x)$  de modo que  $\|X(x)\| < 2\|df_x\|$  e  $X(x)f > \|df\|^2$ . Se  $(\varphi, U)$  for uma carta em  $x$ , estenda  $X$  em  $\varphi(U)$  como o campo constante e defina o conjunto  $O = \{y \in \varphi(U); X(y)f > \|df_y\|^2 \text{ e } \|X(y)\| < 2\|df_y\|\}$ . Como  $Xf, \|df\|$  e  $\|X\|$  são contínuas em  $\varphi(U)$  segue que  $O$  é aberto. □

**Proposição 5.1.5.** Sejam  $M$  uma variedade de Finsler  $C^2$  e  $f:M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Considere a subvariedade aberta  $N$  de  $M$  formada pelos pontos regulares de  $f$ . Então existe um pseudo-gradiente  $C^{1-}$  para  $f$  em  $N$ .

**Dem.:** Para cada  $x \in N$  tome  $O_x$  e  $X_x$  dados pelo lema 5.1.2. Como  $N$  é metrizável, ela admite partição da unidade  $C^{1-}, \{\phi_i\}$  tal que, para cada  $i$ ,  $\exists x_i \in N$  com  $\text{supp}(\phi_i) \subset O_{x_i}$ . Então o campo  $X = \sum_i \phi_i X_{x_i}$  é um pseudo-gradiente  $C^{1-}$  para  $f$ . □

## 5.2 Pontos Críticos e o Teorema do Minimax

Começamos esta seção re-estabelecendo alguns resultados da seção 4.4, mantendo as demonstrações essencialmente intactas :

**Proposição 5.2.1.** Sejam  $M$  uma variedade de Banach conexa  $C^1$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^1$  não constante. Se  $K$  for o conjunto dos pontos críticos de  $f$  tem-se  $f(K) = f(\partial K)$ .

**Dem.:** Como a da proposição 4.4.1.

Teremos que fazer uma pequena alteração na definição da condição (C)

**Definição 5.2.1.** Sejam  $M$  uma variedade de Finsler  $C^1$  e  $f:M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^1$ . Diremos que  $f$  satisfaz a condição (C) se dado um subconjunto  $S \subset M$  onde  $f$  é limitada inferiormente e  $\inf\{\|df_x\|; x \in S\} = 0$ , então existe um ponto crítico de  $f$  aderente a  $S$ .

**Observação:** Como para uma variedade riemanniana  $\|df\| = \|\nabla f\|$ , essa nova definição é exatamente a mesma neste caso.

**Proposição 5.2.2.** Se  $f$  é uma função real  $C^1$  numa variedade de Finsler  $C^1$   $M$  que satisfaz a condição (C) e  $K$  é o conjunto dos pontos críticos de  $f$ ,  $f|_{\partial K}$  é própria.

**Dem.:** Na demonstração da proposição 4.4.2 troque  $\|\nabla f\|$  por  $\|df\|$  e faça  $\rho$  ser a métrica de Finsler de  $M$ .

**Proposição 5.2.3.** Sejam  $M$  uma  $C^2$ -variedade de Finsler completa e sem bordo. Considere uma função  $C^1$   $f:M \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo a condição (C) e  $X$ , um pseudo-gradiente  $C^{1-}$  para  $f$  em  $N$ , a subvariedade dos pontos regulares de  $f$ . Se  $\alpha : (t^-, t^+) \rightarrow N$  for uma curva integral maximal de  $X$  e  $\lim_{t \rightarrow t^+} f(\alpha(t)) < \infty$ , então  $\alpha$  tem um ponto crítico de  $f$  como ponto de acumulação quando  $t \rightarrow t^+$ .

**Dem.:** Defina  $g(t) = f(\alpha(t))$ . Temos

$$g'(t) = df_{\alpha(t)}\alpha'(t) = df_{\alpha(t)}X_{\alpha(t)} \geq \|df_{\alpha(t)}\|^2 > 0$$

então  $g$  é crescente e tem um limite  $L$  quando  $t \rightarrow t^+$ . Se  $L < \infty$ , como

$$g(t) = g(0) + \int_0^t g'(s)ds \geq g(0) + \int_0^t \|df_{\alpha(s)}\|^2 ds$$

também teríamos

$$\int_0^{t^+} \|df_{\alpha(s)}\|^2 ds < \infty$$

Se for  $t^+ = \infty$ , a última desigualdade nos diz que  $\inf\{\|df_{\alpha(t)}\|; t \in [0, \infty)\} = 0$ . Então, como,  $f(\alpha(0)) \leq f(\alpha(t)) \forall t$ , a condição (C) nos diz que  $\alpha$  tem um ponto crítico de  $f$  como ponto de acumulação quando  $t \rightarrow t^+$ .

Por outro lado, se fosse  $t^+ < \infty$ , usando a desigualdade de Schwarz obteríamos

$$\int_0^{t^+} \|df_{\alpha(s)}\| ds \leq t^{+1/2} \left( \int_0^{t^+} \|df_{\alpha(s)}\|^2 ds \right)^{1/2} < \infty$$

Mas  $\|X_{\alpha(t)}\| \leq 2\|df_{\alpha(t)}\| \Rightarrow \int_0^{t^+} \|X_{\alpha(s)}\| ds < \infty$  e, consequentemente (teorema 5.1.4),  $\alpha$  teria um ponto de acumulação em  $K$  quando  $t \rightarrow t^+$ . □

**Observação:** Obviamente também temos que, se  $\lim_{t \rightarrow t^-} < \infty$ , então  $\alpha$  tem um ponto crítico de  $f$  em sua aderência quando  $t \rightarrow t^-$ .

**Proposição 5.2.4.** Sejam  $M$  uma variedade de Finsler  $C^2$  sem bordo,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^1$  satisfazendo a condição (C),  $X$  um pseudo-gradiente  $C^{1-}$  para  $f$  em  $N$  e  $\alpha: (t^-, t^+) \rightarrow N$  uma curva integral maximal de  $X$ . Suponha que  $x$  seja um ponto crítico isolado de  $f$  que está na aderência de  $\alpha$  quando  $t \rightarrow t^+$ , então  $\lim_{t \rightarrow t^+} \alpha(t) = x$ .

**Dem.:** Suponha que não, i.e., que existe uma vizinhança  $V$  de  $x$  e uma sequência  $t_n \rightarrow t^+$  tais que  $x$  seja o único ponto crítico de  $f$  em  $\bar{V}$  e  $\alpha(t_n) \notin V$ . Seja  $U$  outra vizinhança de  $x$  com  $\bar{U} \subset V$ . Dado  $t_1 < t^+$  com  $\alpha(t_1) \in U$ , tome  $s'_1$  o menor dos  $t > t_1$  tais que  $\alpha(t) \in \partial V$ . Tome também  $s_1$  o maior dos  $t < s'_1$  tais que  $\alpha(s) \in \partial U$ , então  $\alpha([s, s']) \subset \bar{V} \setminus U$  e  $\rho(\alpha(s), \alpha(s')) \geq \rho(\partial U, \partial V) = d_0 > 0$ . Indutivamente, podemos escolher  $t_{n+1} > s'_n$  com  $\alpha(t_{n+1}) \in U$  e formar uma sequência de intervalos  $[s_n, s'_n]$ . Como  $g = f \circ \alpha$  é crescente, se  $s \in [s_n, s'_n]$  temos  $f(\alpha(s_1)) \leq f(\alpha(s)) \leq f(x)$ . Por outro lado, o fecho da  $\cup \alpha([s_n, s'_n])$  está contido em  $\bar{V} \setminus U$ , logo, não há pontos críticos de  $f$  em tal união. Assim, como  $f$  satisfaz a condição (C), devemos ter  $\|df_{\alpha(s)}\| \geq d_1 > 0$  para  $s$  em algum  $[s_n, s'_n]$ . Agora segue

$$\begin{aligned} \int_{s_1}^{t^+} \|df_{\alpha(s)}\|^2 ds &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{s_n}^{s'_n} \|df_{\alpha(s)}\|^2 ds \geq d_1 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{s_n}^{s'_n} \|df_{\alpha(s)}\| ds \geq \frac{1}{2} d_1 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{s_n}^{s'_n} \|X(\alpha(s))\| ds = \\ &\frac{1}{2} d_1 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{s_n}^{s'_n} \|\alpha'(s)\| ds \geq \frac{1}{2} d_1 \sum_{n=1}^{\infty} \rho(\alpha(s_n), \alpha(s'_n)) = \infty \end{aligned}$$

Mas, como vimos na demonstração da proposição 5.2.3, devemos ter  $\int_0^{t^+} \|df_{\alpha(s)}\|^2 ds < \infty$  já que  $\lim_{t \rightarrow t^+} f(\alpha(t)) = f(x) < \infty$ . □

De modo análogo à seção 4.4, obtemos os seguintes resultados

**Proposição 5.2.5.** Seja  $M$  uma  $C^2$ -variedade de Finsler sem bordo e  $f \in C^1$ , não constante, satisfazendo (C). Se  $f$  for limitada inferiormente em uma componente conexa  $M_0$ , então  $f$  assume seu limite inferior em  $M_0$ . Se  $f$  for limitada inferiormente em  $M$ , ou existe uma sequência  $M_k$  de componentes conexas de  $M$  onde  $f$  é constante e  $\lim f(M_k) = \inf f$ , ou  $f$  assume seu limite inferior.

**Dem.:** Seja  $\delta_0 = \inf\{f(x); x \in M_0\}$ . Escolha sequência  $x_n \in M_0 \cap \partial K$  tal que  $f(x_n) < \delta + 1/n$ . Então, como  $f$  é própria em  $\partial K$ , existe uma subsequência de  $x_n$  convergindo, o que prova a primeira parte. Agora seja  $\delta = \inf f$  e considere  $p_n \in M_n$  tal que  $f(p_n) = \inf\{f(x); x \in M_n\}$ . Se  $f$  não for constante em  $M_n$ , podemos assumir que  $p_n \in \partial K$  e que  $\lim f(p_n) = \delta$ . Assim, novamente, existe uma subsequência de  $p_n$  que converge . □

**Proposição 5.2.6.** Se  $M$  for variedade de Finsler  $C^1$ ,  $f$  for função real  $C^1$  em  $M$  satisfazendo (C) e  $c$  for um valor regular de  $f$  que não está no interior do conjunto dos valores regulares, então existe um sequência  $M_k$  de componentes conexas de  $M$  com  $f$  constante em  $M_k$  e  $\lim f(M_k) = c$ .

**Dem.:** Considere  $S = \{c \in \mathbb{R}; \exists M_i \text{ componente conexa de } M \text{ onde } f \text{ é constante e igual a } c\}$ . Então  $f(K) = S \cup f(\partial K)$ . Assim, como  $f$  é própria em  $\partial K$ , se  $c \notin f(K)$  não for ponto de acumulação de  $S$ , também não está na aderência de  $f(K)$ . □

**Teorema 5.2.7.** Sejam  $M$  uma  $C^2$ -variedade de Finsler completa sem bordo,  $f$  uma função real  $C^{2-}$  em  $M$  satisfazendo a condição (C) e  $(a, b)$  um intervalo que não contenha valores críticos de  $f$ . Se  $c \in (a, b)$ , então  $W = f^{-1}(c)$  é uma  $C^2$ -subvariedade fechada de  $M$  e existe um homeomorfismo  $C^{1-}$ ,  $\varphi : W \times (a, b) \rightarrow f^{-1}(a, b)$  tal que, para cada  $d \in (a, b)$ , a aplicação  $w \mapsto \varphi(w, d)$  é um homeomorfismo  $C^{1-}$  entre  $W$  e  $f^{-1}(d)$  sendo que, para  $d = c$ , ela é a identidade.

**Dem.:** Que  $W$  é uma subvariedade  $C^2$  segue do corolário 3.4.3.1. Então seja  $X$  um pseudo-gradiente  $C^{1-}$  para  $f$  em  $N=M-K$ . É claro que  $O = f^{-1}(a, b) \subset N$ . Tome  $w \in W$  e  $\sigma : (\alpha, \beta) \rightarrow N$  a curva integral maximal de  $X$  tendo  $w$  como condição inicial. Vejamos que para todo  $d \in (a, b)$  existe um  $t_0 \in (\alpha, \beta)$  tal que  $f(\sigma(t_0)) = d$ . Aliás, tal  $t_0$  será único já que  $f \circ \sigma$  é monótona (proposição 5.2.3). Mas de fato, suponha que  $c < d$  e que não existe este  $t_0$ , então seria  $c = f(\sigma(0)) \leq f(\sigma(t)) < d$  para  $t \in (0, \beta)$ . Assim, pela proposição 5.2.3, existem  $t_n \rightarrow \beta$  e um ponto crítico  $p$  de  $f$  tais que  $\sigma(t_n) \rightarrow p$ , logo,  $f(p) = \lim f(\sigma(t_n))$  é um valor crítico de  $f$  e  $a < f(p) < b$ , contradição. Agora, sendo  $df$  e  $X$   $C^{1-}$ , também  $Xf = df(X)$  é  $C^{1-}$  e como  $Xf > \|df\|^2 > 0$  e  $t \mapsto 1/t$  é  $C^\infty$  para  $t \neq 0$ , segue que  $\frac{1}{Xf}$  é  $C^{1-}$  e, consequentemente,  $Y = \frac{X}{Xf}$  é um campo de vetores  $C^{1-}$  em  $N$ . Seja  $\{\varphi_t\}$  o grupo a um parâmetro definido por  $Y$ , i.e., para  $p \in N$ ,  $t \mapsto \varphi_t(p)$  é curva integral maximal de  $Y$  com condição inicial  $p$ . Como  $Y$  é proporcional a  $X$  com fator de proporção não nulo, segue que  $\varphi_t(p)$  é a curva integral maximal de  $X$  por  $p$  reparametrizada. De fato, como  $\frac{d}{dt}f(\varphi_t(p)) = Yf = 1$ , a reparametrização é tal que  $f(\varphi_t(p)) = f(p) + t$  e, portanto,  $\varphi_t(p)$  está definida para  $a - f(p) < t < b - f(p)$ . Então defina  $\varphi : W \times (a, b) \rightarrow O$  por  $\varphi(w, t) = \varphi_{t-c}(w)$ . Que  $\varphi$  é  $C^{1-}$  está claro, então é só observar que  $\varphi(w, c) = w$ ,  $f(\varphi(w, t)) = t \Rightarrow w \mapsto \varphi(w, d)$  leva  $W$  em  $f^{-1}(d)$  e que  $F : O \rightarrow W \times (a, b)$  dada por  $F(p) = (\varphi_{c-f(p)}(p), f(p))$  é a inversa de  $\varphi$ . □

**Teorema 5.2.8.** Considere uma  $C^2$ -variedade de Finsler sem bordo  $M$  e  $f$  uma função real  $C^{2-}$  em  $M$  satisfazendo a condição (C). Tome  $-\infty < a \leq b \leq \infty$  e suponha que não existam valores

críticos de  $f$  em  $[a, b]$  ( $(a, b)$  se  $b = \infty$ ) e que  $a$  e  $b$  não sejam pontos de acumulação do conjunto  $S = \{c \in \mathbb{R}; \exists M_i \text{ componente conexa de } M \text{ onde } f \text{ é constante e igual a } c\}$ . Então, existe uma homotopia  $C^{1-}$ ,  $H : M \times [0, 1] \rightarrow M$ , tal que, para algum  $\varepsilon > 0$ , valem :

1. Para todo  $s \in [0, 1]$  ( $[0, 1)$  se  $b = \infty$ ),  $H_s$  é um homeomorfismo  $C^{1-}$  de  $M$  em si mesma.
2.  $H_s(x) = x$  se  $x \notin f^{-1}(a - 2\varepsilon, b + 2\varepsilon)$ .
3.  $H_0$  é a identidade.
4. Se  $b < \infty$ ,  $H_1(f^{-1}(-\infty, b + \varepsilon)) = f^{-1}(-\infty, a - \varepsilon)$ .
5. Para  $b = \infty$  tem-se  $H_1(M) = f^{-1}(-\infty, a - 2\varepsilon)$ .

**Dem.:** Pela proposição 5.2.6 existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f$  não possua pontos críticos em  $(a - 3\varepsilon, b + 3\varepsilon)$ . Pelo teorema anterior, existe um difeomorfismo  $C^{1-}$   $\varphi : W \times (a - 3\varepsilon, b + 3\varepsilon) \rightarrow f^{-1}(a - 3\varepsilon, b + 3\varepsilon)$ , onde  $W = f^{-1}(a)$  e  $\varphi(W \times \{c\}) = f^{-1}(c)$ .

Se for  $b = \infty$ , defina  $H_s(m) = m$  se  $f(m) \leq a - 2\varepsilon$  e, se  $f(m) \geq a - 2\varepsilon$ , como  $m = \varphi(w, t)$  para um  $(w, t)$  com  $t \geq a - 2\varepsilon$ , defina  $H_s(m) = (w, t + s(a - 2\varepsilon - t))$ .

Se for  $b < \infty$ , considere  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a única função contínua que satisfaz :

1.  $h(t) = t$  para  $t \leq a - 2\varepsilon$  e para  $t \geq b + 2\varepsilon$
2. é linear em  $[a - 2\varepsilon, b + \varepsilon]$  com  $h(b + \varepsilon) = a - \varepsilon$
3. é linear em  $[b + \varepsilon, b + 2\varepsilon]$  com  $h(b + 2\varepsilon) = b + 2\varepsilon$

Defina  $H_s(m) = m$  quando  $m \notin f^{-1}(a - 2\varepsilon, b + 2\varepsilon)$  e, quando  $m = \varphi(w, t)$ , defina  $H_s(m) = \varphi(w, t + s(h(t) - t))$ .

□

**Teorema 5.2.9.** Sejam  $M$  uma  $C^2$ -variedade de Finsler sem bordo,  $f$  uma função real  $C^{2-}$  em  $M$  satisfazendo (C) e  $M_c = f^{-1}(-\infty, c]$ . Defina  $K_c = K \cap f^{-1}(c)$ , o conjunto dos pontos críticos no nível  $c$ .

1. Se  $c$  for um valor regular de  $f$  e não estiver na aderência de  $S = \{c \in \mathbb{R}; \exists M_i \text{ componente conexa de } M \text{ onde } f \text{ é constante e igual a } c\}$ , então, para algum  $\varepsilon > 0$ , existe uma isotopia  $H_t$  de  $M$  com  $H_1(M_{c+\varepsilon}) = M_{c-\varepsilon}$ .
2. Se  $c > \sup f(K)$ , existe um retrato por deformação forte de  $M$  sobre  $M_{c-\varepsilon}$ , para algum  $\varepsilon > 0$ .
3. Seja  $\mathcal{K}$  o interior de  $K \setminus K_c$ . Se  $c$  não for ponto de acumulação de  $f(\mathcal{K})$ , existe vizinhança  $U$  de  $K_c$  arbitrariamente pequena e  $\varepsilon > 0$  tais que existe uma isotopia  $H_t$  de  $M$  com  $H_1(M_{c+\varepsilon} \setminus U) \subset M_{c-\varepsilon}$ .

**Dem.:** A primeira afirmação segue do teorema anterior com  $a = b = c$  e a segunda também segue do teorema 5.2.8 com  $a = c$  e  $b = \infty$ . Então mostremos a terceira. Seja  $X$  um pseudo-gradiente  $C^{1-}$  para  $f$  em  $N$ , a subvariedade dos pontos regulares. Como na demonstração do teorema 5.2.7,

defina  $Y = \frac{X}{Xf}$ , então  $Y$  é um campo  $C^{1-}$  tal que  $Yf = 1$ . Considere as vizinhanças abertas de  $K$  definidas por  $V_k = \{x \in M; \|df_x\| < 1/k\}$ . É claro que  $\bar{V}_{k+1} \subset V_k$ . Seja  $\psi_k : M \rightarrow [0, 1]$  uma função  $C^{1-}$  que vale 0 em  $\bar{V}_{k+1}$  e 1 em  $M \setminus V_k$  e defina  $Y_k(x) = \psi_k(x)Y(x)$  para  $x \in N$  e  $Y_k(x) = 0$  se  $x \in V_{k+1}$ .

Observe que se  $Y_k(x) \neq 0 \Rightarrow x \notin V_{k+1}$  e  $\|df_x\| \geq 1/(k+1)$ . Logo, como  $X$  é um pseudo-gradiente para  $f$ , temos

$$\|Y(x)\| = \left\| \frac{x(x)}{Xf(x)} \right\| \leq \frac{2\|df_x\|}{\|df_x\|^2} \leq 2(k+1)$$

e, consequentemente,  $Y_k$  é limitado em  $M$  e seu grupo a um parâmetro  $\varphi_{kt}$  está definido sobre  $\mathbb{R}$  (corolário 5.1.4.1). Além disso temos  $\rho(\varphi_{ka}(x), \varphi_{kb}(x)) \leq 2(k+1)|b-a|$  e em particular  $\rho(x, \varphi_{kt}(x)) \leq 2(k+1)|t|$ .

Agora veja que  $\frac{d}{dt}f(\varphi_{kt}(x)) = Y_k(\varphi_{kt}(x))f = \psi_k(\varphi_{kt}(x))Yf = \psi_k(\varphi_{kt}(x))$ . Portanto,  $f(\varphi_{kt}(x))$  é monótona não decrescente. Além do mais, se  $a \leq b$ ,  $f(\varphi_{kb}(x)) - f(\varphi_{ka}(x)) = \int_a^b \psi_k(\varphi_{kt}(x)) dt \Rightarrow f(\varphi_{ka}(p)) + b - a \geq f(\varphi_{kb}(p)) \geq f(\varphi_{ka}(p))$ . Em particular, se  $\varphi_{kt}(x) \notin V_k$  para  $a \leq t \leq b$ , temos  $f(\varphi_{kb}(p)) - f(\varphi_{ka}(p)) = b - a$ . Consequentemente, se  $\{f(x_n)\}$  e  $\{t_n\}$  forem sequências limitadas, a sequência  $\{f(\varphi_{kt_n}(x_n))\}$  é limitada.

Considere

$$U_k = \left\{ x \in M; |f(x) - c| < \frac{1}{k^2} \text{ e } \varphi_{kt}(x) \in V_k \text{ para algum } t \in [-\frac{2}{k^2}, 0] \right\}$$

É claro que  $U_k$  é uma vizinhança aberta de  $K_c$ . Vejamos que para toda vizinhança  $U$  de  $K_c$  existe  $k$  tal que  $U_k \subset U$ . De fato, suponha sem perda de generalidade que  $U$  seja fechada e que não exista  $U_k \subset U$ . Então tome uma sequência  $\{x_k\}$  com  $x_k \in U_k$  e  $x_k \notin U$ . Como  $|f(x_k) - c| < \frac{1}{k^2}$ ,  $f(x_k) \rightarrow c$  e, como por hipótese  $c$  não é um ponto de acumulação de  $K$ , para  $k$  suficiente grande,  $x_k$  não está no interior de  $K$ . Consequentemente, trocando  $x_k$  por um ponto próximo se for o caso, podemos supor que  $x_k$  não é um ponto crítico de  $f$ . Escolha  $t_k \in [-2/k^2, 0]$  de modo que  $\varphi_{kt_k}(x_k) \in V_k$ . Então  $\{f(\varphi_{kt_k}(x_k))\}$  é limitada. Além disso  $\|df_{y_k}\| < 1/k$  onde  $y_k = \varphi_{kt_k}(x_k)$ , logo, pela condição (C), existe uma subsequência de  $\{\varphi_{kt_k}(x_k)\}$  convergindo para  $y \in K$ . Então temos

$$\rho(x_k, y) \leq \rho(x_k, \varphi_{kt_k}(x_k)) + \rho(\varphi_{kt_k}(x_k), y) \leq 2(k+1)|t_k| + \rho(\varphi_{kt_k}(x_k), y) \leq \frac{4(k+1)}{k^2} + \rho(\varphi_{kt_k}(x_k), y)$$

Assim, a subsequência correspondente dos  $x_k$  também converge para  $y$ . Mas  $f(y) = c \Rightarrow y \in K_c$  uma contradição pois  $x_k \notin U$ .

Finalmente vejamos que se  $0 < \varepsilon < 1/k^2$ ,  $\varphi_{k-1}(M_{c+\varepsilon} \setminus U_k) \subset M_{c-\varepsilon}$ . Tome  $x \in M_{c+\varepsilon} \setminus U_k$ . Então  $f(x) \leq c + \varepsilon < c + 1/k^2$ . Como  $f(\varphi_{k-t}(x))$  é não crescente, podemos supor que  $f(x) > c - 1/k^2$  e então  $|f(x) - c| < 1/k^2$  e, pela definição de  $U_k$ ,  $\varphi_{kt}(x) \notin V_k$  para  $t \in [-2/k^2, 0]$ . Assim

$$f(\varphi_{k-1}(x)) \leq f(\varphi_{k-2/k^2}(x)) = f(x) - \frac{2}{k^2} < c - \frac{1}{k^2} < c - \varepsilon$$

Agora é só lembrar que  $t \mapsto \varphi_{k-t}$  é uma isotopia em  $M$ .

□

**Definição 5.2.2.** Seja  $\mathcal{F}$  uma família de subconjuntos de uma variedade de Banach  $M$ .  $\mathcal{F}$  é dita invariante por isotopias se, dado  $F \in \mathcal{F}$  e uma isotopia  $H_t : M \rightarrow M$ ,  $H_1(F) \in \mathcal{F}$ . Neste caso, dada uma função  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos o minimax( $f, \mathcal{F}$ ) por

$$\text{minimax}(f, \mathcal{F}) = \inf_{F \in \mathcal{F}} \sup \{f(x); x \in F\}$$

ou equivalentemente

$$\text{minimax}(f, \mathcal{F}) = \inf\{a \in \mathbb{R}; \exists F \in \mathcal{F} \text{ com } F \subset M_a\}$$

**Teorema 5.2.10. (Teorema do Minimax) :** Sejam  $M$  uma  $C^2$ -variedade de Finsler completa e sem bordo e  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^{2-}$  satisfazendo (C). Suponha que  $\mathcal{F}$  seja uma família de subconjuntos de  $M$  invariante por isotopias e que  $-\infty < \text{minimax}(f, \mathcal{F}) < \infty$ . Então, ou  $\text{minimax}(f, \mathcal{F})$  é um valor crítico de  $f$ , ou existe uma sequência de valores críticos de  $c_n$  convergindo para o  $\text{minimax}(f, \mathcal{F})$  e uma sequência  $M_n$  de componentes conexas de  $M$  tal que  $f(M_n) = c_n$ .

**Dem.:** Suponha que  $a = \text{minimax}(f, \mathcal{F})$  seja um valor regular, mas que não seja um ponto de aderência de  $S = \{c \in \mathbb{R}; \exists M_i \text{ componente conexa de } M \text{ onde } f \text{ é constante e igual a } c\}$ . Escolha  $\varepsilon > 0$  satisfazendo (1) do teorema 5.2.9 e  $F \in \mathcal{F}$  com  $F \subset M_{a+\varepsilon}$ . Então existe uma isotopia  $H_t$  de  $M$  com  $H_1(F) \subset M_{a-\varepsilon}$ . Como  $H_1(F) \in \mathcal{F} \Rightarrow a \leq a - \varepsilon$ , contradição. □

### 5.3 Categoria de Lusternick-Schnirelman

**Definição 5.3.1.** Seja  $X$  um espaço topológico. A categoria de Lusternik-Schnirelman de um subconjunto  $A$  de  $X$  é definida por

$$\text{cat}(A, X) = \min\{n \in \mathbb{N}; \exists F_1, \dots, F_n, \text{ fechados e contráteis em } X, \text{ tais que } A \subset \cup F_i\}$$

A categoria de  $X$  é definida por  $\text{cat}(X) = \text{cat}(X, X)$ .

**Observação:** Caso tal número não exista,  $\text{cat}(A, X)$  é dita infinita.

As seguintes propriedades são imediatas da definição

1.  $\text{cat}(A, X) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$ .
2.  $\text{cat}(A, X) = \text{cat}(\bar{A}, X)$  e  $\text{cat}(A, X) = 1 \Leftrightarrow \bar{A}$  é contrátil em  $X$ .
3. Se  $A$  for fechado,  $\text{cat}(A, X) = m \Leftrightarrow A$  for a união de  $m$  fechados contráteis de  $X$ .
4. Se  $A \subset B \Rightarrow \text{cat}(A, X) \leq \text{cat}(B, X)$ .
5.  $\text{cat}(A \cup B, X) \leq \text{cat}(A, X) + \text{cat}(B, X)$ .
6. Se  $A$  e  $B$  forem fechados e  $A$  for deformável em  $B$ , i.e., existe uma homotopia  $H : A \times [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $H_0$  é a inclusão de  $A$  em  $X$  e  $H_1(A) \subset B$ , então  $\text{cat}(A, X) \leq \text{cat}(B, X)$ .
7. Se  $h: X \rightarrow X$  for um homeomorfismo,  $\text{cat}(h(A), X) = \text{cat}(A, X)$ .

**Definição 5.3.2.** Um espaço metrizável  $X$  é dito uma retração absoluta se, dados um subconjunto fechado  $A$  de um espaço metrizável  $Y$  e uma função contínua  $f: A \rightarrow X$ , existir uma extensão de  $f$  definida em  $Y$ .  $X$  será dito uma vizinhança de retração absoluta se existir uma extensão de  $f$  definida numa vizinhança de  $A$ .

**Notação:** Escreveremos apenas que  $X$  é um AR (do inglês *absolute retract*) ou um ANR (*absolute neighbourhood retract*) respectivamente.

**Observação:** A definição usual requer que  $X$  seja separável. Existe a noção local de AR e ANR, i.e.,  $X$  é localmente AR (ANR) se cada ponto possuir uma vizinhança que é AR (ANR).

Dados um ANR  $X$  e  $x \in X$ , defina  $S$  como sendo o seguinte subconjunto fechado de  $X \times [0, 1]$  :  $S = (X \times \{0\}) \cup (\{x\} \times [0, 1]) \cup (X \times \{1\})$ . Defina também  $f: S \rightarrow X$  por  $f(y, 0) = y, f(x, t) = f(y, 1) = x$  e estenda  $f$  para uma vizinhança  $O$  de  $S$ . Chame de  $F$  tal extensão. Considere uma vizinhança  $V$  de  $x$  tal que  $V \times [0, 1] \subset O$ , então  $F|_{V \times [0, 1]}$  é uma contração de  $V$  em  $x$ , de modo que, todo ponto de um ANR  $X$  possui uma base de vizinhanças contraíveis em  $X$ .

**Definição 5.3.3.** Dizemos que um subconjunto fechado  $A$  de um espaço metrizável  $X$  tem a propriedade de estender homotopias em  $X$  com respeito a um espaço  $Y$  se cada função contínua  $f : (X \times \{0\}) \cup (A \times [0, 1]) \rightarrow Y$  puder ser estendida a  $X \times [0, 1]$ . Se isto ocorrer para todo espaço  $Y$ , diremos que  $A$  tem a propriedade absoluta de estender homotopias.

**Proposição 5.3.1. (Borsuk) :** Sejam  $Y$  um ANR,  $X$  um espaço metrizável e  $A \subset X$  fechado. Então  $A$  estende homotopias em  $X$  com respeito a  $Y$ .

**Dem.:** Chame  $T = (X \times \{0\}) \cup (A \times [0, 1])$ . Dada  $f : T \rightarrow Y$ , seja  $F : U \times [0, 1] \rightarrow Y$  uma extensão de  $f$ , onde  $U$  é uma vizinhança de  $T$  em  $X \times [0, 1]$ . Devido à compacidade do intervalo  $[0, 1]$ , podemos achar uma vizinhança  $V$  de  $A$  tal que  $V \times [0, 1] \subset U$ . Seja  $g : X \rightarrow [0, 1]$  uma função com suporte em  $V$  e tal que  $g|_A \equiv 1$ . Agora é só definir a extensão de  $f$  a  $X \times [0, 1]$  por

$$H(x, t) = F(x, g(x)t)$$

□

**Proposição 5.3.2.** Se  $X$  é ANR e  $A \subset X$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $A$  com  $\text{cat}(\bar{U}, X) = \text{cat}(A, X)$ .

**Dem.:** Só precisamos verificar o caso  $\text{cat}(A, X) = n < \infty$ , pois, caso contrário, basta tomar  $U = X$ . Escreva  $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$  com  $A_i$  fechado e contrátil em  $X$ . Bastará encontrarmos vizinhanças  $U_i$  de  $A_i$  com  $\text{cat}(\bar{U}_i, X) = 1$  e tomar  $U = \cup U_i$ . Então fixe  $i$  e considere uma deformação  $f_t$  de  $A_i$  em um ponto  $x \in X$ . Seja  $O$  uma vizinhança de  $x$  tal que  $\bar{O}$  seja contrátil em  $X$ . Agora, usando a proposição 5.3.1, estendemos  $f$  a uma homotopia  $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ . Temos  $A_i = f_1^{-1}(x) = f_1^{-1}(O) \subset H_1^{-1}(O)$ . Defina  $U_i$  de modo que  $\bar{U}_i \subset F_1^{-1}(O)$ , logo,  $\text{cat}(\bar{U}_i, X) \leq \text{cat}(F_1(\bar{U}_i), X) \leq \text{cat}(\bar{O}, X) = 1$ .

□

**Definição 5.3.4.** A dimensão de cobertura de um espaço  $X$  é o menor inteiro  $n$  tal que, dada uma cobertura aberta de  $X$ , existe um refinamento aberto com a propriedade de que a interseção de mais de  $n$  abertos distintos de tal refinamento é vazia. Se tal inteiro não existir a dimensão é definida infinita.

**Lema 5.3.1.** Seja  $\{U_i; i \in I\}$  ( $I$  é um conjunto de índices) uma cobertura aberta de um espaço paracompacto  $X$ . Existe um refinamento aberto localmente finito  $\{G_l; l \in I\}$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , tal que, se  $j \neq k, G_{l_j} \cap G_{l_k} = \emptyset$ . Se a dimensão de cobertura de  $X$  for  $n < \infty$  podemos tomar  $I_l = \emptyset$  para  $l > n$ .



**Dem.:** A menos de um refinamento inicial podemos supor  $\{U_i\}$  localmente finito e, caso a dimensão de  $X$  seja  $n$ , que  $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_{n+1}} = \emptyset$  para distintos  $i_k$ . Seja  $I_l$  o conjunto dos subconjuntos de  $I$  formados por  $l + 1$  elementos. Considere uma partição da unidade  $\{\varphi_i\}$  com  $\text{supp}(\varphi_i) \subset U_i$  e, para  $j \in I_l$ , defina

$$G_{l_j} = \{x \in X; \varphi_i(x) > 0 \text{ se } i \in j, \text{ e } \varphi_k(x) < \varphi_i(x) \text{ se } i \in j, k \notin j\}$$

Como perto de cada  $x$  apenas um número finito de  $\varphi_i$ 's é não nula, segue que  $G_{l_j}$  é aberto. Também é claro que  $G_{l_j} \cap G_{l_k} = \emptyset$  e que  $G_{l_j} = \emptyset$  para  $l > n$ . Como  $G_{l_j} \subset \cap_{i \in j} U_i$ ,  $\{G_{l_j}\}$  é de fato um refinamento de  $\{U_i\}$ . Para ver que  $\{G_{l_j}\}$  cobre  $X$ , tome  $x_0 \in X$  e considere todos os índices  $i_0, \dots, i_l, \dots, i_m$  tais que  $\varphi_{i_k}(x_0) > 0$ , ordenados de maneira que

$$\varphi_{i_0}(x_0) = \dots = \varphi_{i_l}(x_0) > \varphi_{i_{l+1}}(x_0) \geq \dots \geq \varphi_{i_m}(x_0)$$

Assim  $x_0 \in G_{l_{\{i_0, \dots, i_l\}}}$ . Finalmente, se  $O$  é uma vizinhança de  $X$  tal que  $U_i \cap O \neq \emptyset$  apenas para finitos índices  $i$  (seja  $I'$  o conjunto de tais índices), então  $G_{l_j} \cap O = \emptyset$  a menos que  $j \subset I'$ . Como tais  $j$ 's são em número finito,  $\{G_{l_j}\}$  é localmente finito. □

**Proposição 5.3.3.** Seja  $X$  um ANR conexo e  $A \subset X$  fechado. Então  $\text{cat}(A, X) \leq \dim(A) + 1$ , onde  $\dim(A) = n$  denota a dimensão de cobertura de  $A$ . Em particular,  $\text{cat}(X) \leq \dim(X) + 1$

**Dem.:** Seja  $\{O_i\}$  uma cobertura aberta de  $A$  composta por abertos em  $A$  que são contráteis em  $X$  e seja  $\{G_{l_j}\}, l = 0, 1, \dots, n$ , um refinamento de  $\{O_i\}$  como o do lema 5.3.1. Sendo  $X$  conexo e localmente conexo por arcos segue que  $X$  é conexo por arcos, assim, como  $G_{l_j}$  é contrátil em  $X$ , também o é  $G_l = \cup_{j \in I_l} G_{l_j}$ . Considere  $\{U_{l_j}\}$  uma cobertura de  $A$  por aberto de  $A$  tal que  $\overline{U}_{l_j} \subset G_{l_j}$ . Então  $A_l = \cup_{j \in I_l} \overline{U}_{l_j} \subset G_l$  e, portanto,  $A_l$  é contrátil em  $X$  e  $A = \cup A_l$ . Como  $\overline{U}_{l_j}$  são fechados em  $A$  e formam um conjunto localmente finito, temos que  $A_l$  é fechado em  $A$  e também em  $X$ . □

Antes de provarmos os dois principais teoremas da seção vamos precisar dos quatro resultados abaixo. Só forneceremos a demonstração do quarto. Uma referência para estes e outros resultados relacionados é [2].

**Teorema 5.3.4.** Uma variedade  $C^0$  é metrizável se, e somente se, satisfizer o 1º axioma de enumerabilidade e for paracompacto. Mais geralmente, um espaço de Hausdorff é metrizável se, e só se, for localmente metrizável e paracompacto.

**Lema 5.3.2.** Um retrato de um ANR, um subconjunto aberto de um ANR e a soma topológica de ANR's ainda são ANR's.

**Lema 5.3.3.** Seja  $X$  um espaço métrico.

1. Se  $X = X_1 \cup X_2$  com  $X_i$  ANR aberto, então  $X$  também é ANR.
2. Se  $X = X_1 \cup X_2$  com  $X_i$  e  $X_1 \cap X_2$  ANR's fechados,  $X$  também é ANR.
3. Se  $X = \cup_1^\infty X_i$  com  $X_i$  ANR aberto,  $X$  é ANR.

**Proposição 5.3.5.** Um espaço de Hausdorff paracompacto  $X$  que é localmente ANR é ANR, em particular, uma variedade metrizável é ANR.

**Dem.:** Sendo  $X$  localmente ANR ele é localmente metrizável e, pelo teorema 5.3.4, é metrizável. Considere uma cobertura aberta de  $X$   $\{U_i\}$  formada por ANR's e tome um refinamento  $\{G_{l_j}\}$  como no lema 5.3.1. Cada  $G_{l_j}$  é ANR pois é aberto em algum  $U_i$  (lema 5.3.2). Assim,  $G_l = \cup_{j \in I_l} G_{l_j}$  é soma topológica de ANR's já que a união é disjunta e, portanto, também é ANR. Agora  $X = \cup_1^\infty G_l$  é ANR pelo lema 5.3.3. □

**Observação:** De maneira mais geral, um espaço metrizável é ANR se cada ponto possuir uma vizinhança homeomorfa a um subconjunto convexo de um espaço vetorial topológico real localmente convexo.

**Teorema 5.3.6.** Sejam  $M$  uma  $C^2$ -variedade de Finsler completa sem bordo,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^{2-}$  satisfazendo a condição (C),  $K$  o conjunto de pontos críticos de  $f$ ,  $K_a = K \cap f^{-1}(a)$ ,  $K_a$  o interior de  $K \setminus K_a$  e  $M_a = f^{-1}((-\infty, a])$ . Suponha que todo  $a \in \mathbb{R}$  não seja ponto de acumulação de  $f(K_a)$  e para cada inteiro positivo  $m \leq \text{cat}(M)$  defina

$$c_m(f) = \inf\{a \in \mathbb{R}; \text{cat}(M_a, M) \geq m\}$$

Então

1.  $c_1(f) = \inf\{f(x); x \in M\}$ .
2.  $c_m(f) \leq c_{m+1}(f)$ .
3. Se  $-\infty < c_m(f) < \infty$ ,  $c_m(f)$  é valor crítico de  $f$ .
4. Se algum  $c_m(f) = \infty$ ,  $f$  é ilimitada em  $K$  e, conseqüentemente,  $K$  é infinito. De fato  $c_m(f) \geq \sup\{f(x); x \in K\}$ .
5. Se  $0 < m < n \leq \text{cat}(M)$  e  $-\infty < c = c_m(f) = c_n(f) < \infty \Rightarrow \text{cat}(K_c, M) \geq n - m + 1$ , logo, se  $M$  for conexa, a dimensão de cobertura de  $K_c$  é pelo menos  $n - m$ .

**Dem.:**

1. Segue do fato de que  $\text{cat}(M_a, M) \geq 1$  se  $a > \inf\{f(x)\}$ .
2. Direto da monotonicidade de  $\text{cat}(\cdot, M)$ .
3. Considere  $\mathcal{F}_m = \{F \subset M; \text{cat}(F, M) \geq m\}$ . Observe que  $M_a \in \mathcal{F}_m \Leftrightarrow \exists F \in \mathcal{F}_m$  com  $F \subset M_a$ , logo

$$c_m(f) = \inf\{a \in \mathbb{R}; \exists F \in \mathcal{F}_m \text{ com } F \subset M_a\} = \text{minimax}(f, \mathcal{F}_m)$$

Como, dada uma isotopia  $H_t$ ,  $\text{cat}(H_1(F), M) = \text{cat}(F, M)$ ,  $\mathcal{F}_m$  é invariante por isotopias e o resultado segue pelo teorema do minimax 5.2.10.

4. Se  $c > \sup\{f(x)\}$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\text{cat}(M_{c-\varepsilon}, M) = \text{cat}(M)$  (teorema 5.2.8). Então, se  $m \leq \text{cat}(M)$ ,  $c_m(f) \leq c - \varepsilon < c$ .
5. O primeiro passo será provar que  $\text{cat}(K_c, M) \geq \text{cat}(M_{c+\varepsilon}, M) - \text{cat}(M_{c-\varepsilon}, M)$  para algum  $\varepsilon > 0$ . Sendo  $M$  metrizável é ANR (proposição 5.3.5), então, pela proposição 5.3.2, existe uma vizinhança de  $U$  de  $K_c$  tal que  $\text{cat}(U, M) = \text{cat}(\overline{U}, M) = \text{cat}(K_c, M)$ . Agora, usando o teorema 5.2.9, existe uma isotopia  $H_t$  de  $M$  com  $H_1(M_{c+\varepsilon}) \subset M_{c-\varepsilon}$ . Assim,

$$\text{cat}(M_{c-\varepsilon}, M) \geq \text{cat}(H_1(M_{c+\varepsilon} \setminus U), M) = \text{cat}(M_{c+\varepsilon} \setminus U, M)$$

Usando a monotonicidade e sub-aditividade de  $\text{cat}(\cdot, M)$  temos

$$\text{cat}(M_{c+\varepsilon}, M) \leq \text{cat}(M_{c+\varepsilon} \cup U, M) \leq \text{cat}(M_{c+\varepsilon} \setminus U, M) + \text{cat}(U, M) \leq \text{cat}(M_{c+\varepsilon}, M) + \text{cat}(K_c, M)$$

Se  $c = c_n(f) \Rightarrow \text{cat}(M_{c+\varepsilon}, M) \geq n$  e sendo  $c = c_m(f) \Rightarrow \text{cat}(M_{c-\varepsilon}, M) \leq m - 1$ . A última afirmação agora segue da proposição 5.3.3. □

**Teorema 5.3.7.** Se  $M$  é uma variedade de Finsler  $C^2$  completa e sem bordo e  $f$  é uma função real  $C^{2-}$  em  $M$  satisfazendo (C) que é limitada inferiormente (ou superiormente), então  $f$  tem pelo menos  $\text{cat}(M)$  pontos críticos.

**Dem.:** Podemos supor que nenhum  $c \in \mathbb{R}$  é ponto de acumulação de  $f(K_c)$ , pois, neste caso,  $f$  teria infinitos pontos críticos e o teorema estaria trivialmente comprovado. Analogamente, pelo teorema anterior, podemos supor que  $c_m(f) < \infty$  para  $m \leq \text{cat}(M)$ . Também basta provarmos para  $f$  limitada inferiormente, se não for use  $-f$ , e assim  $-\infty < c_1(f)$  e  $-\infty < c_m < \infty$  para  $m = 1, 2, \dots, \text{cat}(M)$ . Mostraremos indutivamente que existem pelo menos  $m$  pontos críticos de  $f$  em  $M_{c_m(f)}$ . O caso  $m = 1$  sai direto do teorema 5.3.6 (1), então suponha que existem pelo menos  $k$  pontos críticos em  $M_{c_k(f)}$  para  $k \leq n$ . Se  $c_n(f) \neq c_{n+1}(f)$ , a parte (3) do teorema 5.3.6 nos diz que existe pelo menos um ponto crítico de  $f$  em  $f^{-1}(c_{n+1}(f))$  e, conseqüentemente, pelo menos  $n + 1$  pontos críticos de  $f$  em  $f^{-1}(c_{n+1}) \cup M_{c_n}(f) \subset M_{c_{n+1}(f)}$ . Se for  $c = c_n(f) = c_{n+1}(f)$ , seja  $m$  o menor inteiro positivo tal que  $c_m(f) = c_{n+1}(f)$ . A parte (5) do mesmo teorema nos conta que  $\text{cat}(K_c, M) \geq n + 1 - m + 1 = n + 2 - m \Rightarrow \#K_c \geq \text{cat}(K_c, M)$ , ou seja, existem pelo menos  $n + 2 - m$  pontos críticos no nível  $c$ . Se for  $m = 1$  acabou, se não, existem pelo menos  $m - 1 + n + 2 - m = n + 1$  pontos críticos de  $f$  em  $M_{c_{m-1}(f)} \cup f^{-1}(c_{n+1}(f)) \subset M_{c_{n+1}(f)}$ . □

Terminamos o capítulo com uma aplicação :

**Teorema 5.3.8.** Seja  $M$  uma variedade riemanniana  $n$ -dimensional compacta e conexa. Dados  $x, y \in M$ , existem infinitas geodésicas ligando  $x$  a  $y$ <sup>(3)</sup>

**Dem.:** Considere, como no capítulo 4, a ação integral  $\tilde{L} : \Lambda(M; x, y) \rightarrow \mathbb{R}$  e defina o conjunto  $P_x = \{\alpha \in H_1(I, M); \alpha(0) = x\}$ . Temos uma projeção natural

$$\begin{array}{ccc} \pi : P_x & \longrightarrow & M \\ \alpha & \mapsto & \alpha(1) \end{array}$$

Assim  $\Lambda(M; x, y) = \pi^{-1}(y)$ , em particular,  $\Lambda(M; x, y)$  é homotopicamente equivalente ao espaço de laços (contínuos) sobre  $x$ ,  $\Lambda_x(M)$ .

**Observação:** Aqui temos um problema a princípio, pois, a topologia de  $\Lambda_x(M)$ , ou, de forma mais geral, a topologia do espaço de caminhos contínuos  $\Lambda_{x,y}(M)$  é a induzida por  $C^0(I, M)$ , enquanto que em  $\Lambda(M; x, y)$  temos a topologia de  $H_1(I, M)$ . Mas a proposição 4.3.5 nos diz que a inclusão  $i : \Lambda(M; x, y) \hookrightarrow \Lambda_{x,y}(M)$  é contínua. De fato,  $i$  é uma equivalência de homotopias; uma inversa homotópica pode ser construída usando-se operadores de convolução, mas isto já foge do escopo deste trabalho.

<sup>3</sup>Compare com o corolário 4.4.3.2 e com o teorema 4.4.4.

Então, se  $\pi_1(M)$  for infinito,  $\Lambda_x(M)$  assim como  $\Lambda(M; x, y)$  têm infinitas componentes conexas e o mínimo de  $\tilde{L}$  em cada uma delas (corolário 4.4.3.2) nos fornece infinitas geodésicas ligando  $x$  a  $y$ .

Suponha agora que  $\pi_1(M) = \{0\}$ . Um resultado conhecido da topologia algébrica nos diz que  $\text{cat}(\Lambda_x(M)) = \infty$  e, conseqüentemente, existem infinitos pontos críticos de  $\tilde{L}$  que, como já vimos, são geodésicas ligando  $x$  e  $y$ . Finalmente, se  $\pi_1(M)$  for finito, o revestimento universal  $\tilde{M}$  de  $M$  é compacto. Assim, se  $\tilde{x}, \tilde{y}$  estão na fibra sobre  $x$  e  $y$  respectivamente, pelo que acabamos de ver, existem infinitas geodésicas entre  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  que são projetadas em infinitas geodésicas ligando  $x$  a  $y$ .  $\square$

## 6 Alguns Pequenos Avanços

### 6.1 A Energia de Finsler e Problemas Variacionais Super Regulares

Nesta seção  $M$  será uma variedade riemanniana compacta  $n$ -dimensional. A métrica em  $M$  será denotada por  $\langle, \rangle$  ou  $g$ .

Chamaremos de  $\Lambda M$  ou  $H^1(S^1, M)$  o espaço das funções absolutamente contínuas  $c : S^1 \rightarrow M$  tais que  $\|c'(t)\| \in L^2(S^1)$ . Como na seção 4.3, descreveremos uma estrutura de variedade riemanniana para  $\Lambda M$  associada à estrutura de  $M$ . Considere  $c \in C^\infty(S^1, M)$  e

$$c^*TM = \{(t, v); t \in S^1 \text{ e } (c(t), v) \in T_{c(t)}M\}$$

Temos o pull-back<sup>(4)</sup>

$$\begin{array}{ccc} c^*TM & \xrightarrow{c^*} & TM \\ \downarrow \pi_c^* & & \downarrow \pi \\ S^1 & \xrightarrow{c} & M \end{array}$$

e assim, também podemos fazer o pull-back da métrica, i.e.

$$\langle (t, v), (t, u) \rangle_c := \langle (c(t), v), (c(t), u) \rangle$$

Denote por  $\Sigma(\pi_c^*)$  o conjunto das seções  $X : S^1 \rightarrow c^*TM$  e defina

$$H^0(c^*TM) = \{X \in \Sigma(\pi_c^*); \|X(t)\|_c \in L^2(S^1)\}$$

$$H^1(c^*TM) = \{X \in \Sigma(\pi_c^*); X \text{ é contínua, } \nabla_c X \text{ existe q.t.p. e } \nabla_c X \in H^0(c^*TM)\}$$

onde  $\nabla_c X = \frac{DX}{dt}$  é derivada covariante de  $X$  ao longo de  $c$ . Também temos

$$C^k(c^*TM) = \{X \in \Sigma(\pi_c^*); X \in C^k(S^1, c^*TM)\}$$

Os espaços  $H^i(c^*TM)$  se tornam espaços de Hilbert (módulo q.t.p.) com os produtos escalares

$$\langle X, Y \rangle_0 = \int_{S^1} \langle X(t), Y(t) \rangle_c dt$$

$$\langle X, Y \rangle_1 = \langle X, Y \rangle_0 + \langle \nabla_c X, \nabla_c Y \rangle_0$$

**Observação:**  $\|\cdot\|_i$  denotará a norma de  $H^i$  correspondente ao produto acima e  $\|\cdot\|_\infty$  será a norma de  $C^0(c^*TM)$ .

**Lema 6.1.1.**  $\|\cdot\|_0 \leq \|\cdot\|_\infty \leq \sqrt{2}\|\cdot\|_1$ .

**Dem.:**  $\|X\|_0^2 = \int_{S^1} \langle X(t), X(t) \rangle_c dt \leq \int_{S^1} \max \|X(t)\|_c^2 = \|X\|_\infty^2$ . Agora escolha  $t_1$  tal que  $\|X(t)\|_c \leq \|X(t_1)\|_c \forall t$ , então

$$\|X\|_\infty^2 = \|X(t_1)\|_c^2 = \|X(t)\|_c^2 + \int_t^{t_1} \frac{d}{dt} \|X(t)\|_c^2 dt \leq \|X(t)\|_c^2 + 2 \int_{S^1} \|X(t)\|_c \|\nabla_c X(t)\|_c dt \leq 2\|X\|_1^2$$

□

<sup>4</sup>Podemos substituir  $TM$  por qualquer fibrado vetorial  $\pi : E \rightarrow M$  com fibra sobre um espaço de Banach  $E$ .

Antes de prosseguirmos vamos introduzir o conceito de conexão de uma maneira alternativa que nos será útil. Dado um fibrado vetorial sobre  $M$ ,  $\pi : E \rightarrow M$ , com fibra num espaço de Banach  $\mathbb{E}$ , considere uma carta local  $(\phi_i, U_i)$  para  $M$  assim como a carta associada  $(\Phi_i, \phi_i, U_i)$  para  $E$  dada pelo diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Phi_i} & \phi_i(U_i) \times \mathbb{E} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ U_i & \xrightarrow{\phi_i} & \phi_i(U_i) \end{array}$$

com as propriedades

- A restrição  $\Phi_i|_{E_p}$  à fibra  $E_p = \pi^{-1}(p)$  é um homeomorfismo linear entre  $E_p$  e  $\mathbb{E}$ .
- Se  $(\Phi_i, \phi_i, U_i)$  e  $(\Phi_j, \phi_j, U_j)$  forem duas cartas distintas, então  $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : U_i \cap U_j \rightarrow L(\mathbb{E}; \mathbb{E})$  é uma aplicação diferenciável (tanto quanto for a diferenciabilidade em  $M$ ).

**Observação:** Como de costume denotaremos os elementos de  $\phi_i(U_i) \times \mathbb{E}$  por  $(x, v)$ . Por vezes  $v$  é chamado de parte principal da representação local.

De maneira análoga, uma carta local para  $\pi : E \rightarrow M$  nos fornece uma representação local para o fibrado tangente  $\pi : TE \rightarrow E$

$$\begin{array}{ccc} T\pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{d\Phi_i} & \phi_i(U_i) \times \mathbb{E} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{E} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Phi_i} & \phi_i(U_i) \times \mathbb{E} \end{array}$$

Os elementos em  $\phi_i(U_i) \times \mathbb{E} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{E}$  serão denotados por  $(x, v, y, u)$ .

**Definição 6.1.1.** Uma conexão sobre um fibrado vetorial  $\pi : E \rightarrow M$  é uma aplicação  $K : TE \rightarrow E$  tal que, dada uma carta local  $(\Phi_i, \phi_i, U_i)$  para  $E$ , existe uma aplicação diferenciável

$$\Gamma_i : \phi_i(U_i) \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}; \mathbb{E})$$

tal que a representação local de  $K$ ,  $K_i = \Phi_i \circ K \circ d\Phi_i^{-1} : \phi_i(U_i) \times \mathbb{E} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{E} \rightarrow \phi_i(U_i) \times \mathbb{E}$  é dada por

$$(x, v, y, u) \mapsto (x, u + \Gamma_i(x)(y, v))$$

$\Gamma_i$  é chamada de símbolo de Christoffel.

Observe que  $K$  faz o diagrama abaixo comutar

$$\begin{array}{ccc} TE & \xrightarrow{K} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

e que  $K|_{T_{(x,v)}E} \in L(T_{(x,v)}E; E_x)$

Um fato importante sobre conexões é que elas dividem  $TE$  em componentes vertical e horizontal definidas assim

$$T_{(x,v)}^v E = \mathcal{N}(d\pi : T_{(x,v)}E \rightarrow T_x M) \quad \text{e} \quad T_{(x,v)}^h E = \mathcal{N}(K|_{T_{(x,v)}E})$$

**Proposição 6.1.1.** Feita a identificação natural de  $T_{(x,v)}^v E$  com  $E_x$ , i.e., identificando  $(x, v, 0, u)$  com  $(x, u)$ , temos

$$T_{(x,v)}^v E = (id - K)T_{(x,v)} E + K T_{(x,v)} E$$

**Dem.:** Basta observar que  $K_i^2 = K_i$  e que  $K_i T_{(x,v)} E = T_{(x,v)}^v E$ . □

Dada uma conexão  $K$ , definimos a derivada covariante de uma seção  $X : M \rightarrow E$  por

$$\nabla X = K \circ dX$$

Dessa maneira  $\nabla X$  é uma seção do fibrado  $L(TM; E) \rightarrow M$ . A parte principal de uma representação de  $\nabla X$  é dada por

$$\nabla_i X(x) = dX_i(x) + \Gamma_i(x)(\cdot, X_i(x))$$

onde  $X_i$  é a parte principal da representação local de  $X$ .

Agora, repentinamente o processo do início da seção, dada uma curva  $c : S^1 \rightarrow M$ , temos o pull-back

$$\begin{array}{ccc} c^* E & \xrightarrow{c_\pi^*} & E \\ \downarrow \pi_c^* & & \downarrow \pi \\ S^1 & \xrightarrow{c} & M \end{array}$$

O pull-back da conexão  $K$  é dado pelo diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} Tc^* E & \xrightarrow{dc_\pi^*} & TE \\ \downarrow K_c & & \downarrow K \\ c^* E & \xrightarrow{c_\pi^*} & E \end{array}$$

Então, se  $X$  é uma seção de  $\pi_c^*$  e  $\partial t$  é o vetor tangente canônico em  $t \in S^1$  definimos

$$\nabla_c X = \nabla X \partial t$$

Outro fibrado associado ao fibrado  $\pi : E \rightarrow M$  é  $L_s^2(\pi) : L_s^2(E) \rightarrow M$ , cuja fibra  $L_s^2(\mathbb{E})$  é o conjunto das formas bilineares simétricas contínuas. Uma métrica riemanniana para o fibrado é então uma seção  $g : M \rightarrow L_s^2(E)$  tal que  $g(p)$  é positiva definida.

**Definição 6.1.2.** Uma conexão é dita riemanniana se para todo aberto  $U \subset M$  valer

$$dg(v)(X, Y) = g(\nabla X v, Y) + g(X, \nabla Y v)$$

onde  $X, Y : U \rightarrow E$  e  $v : U \rightarrow TM$  são seções.

Considere fibrados vetoriais de dimensão finita sobre  $S^1$  munidos de uma métrica riemanniana,  $\pi_j : E_j \rightarrow S^1, 1 \leq j \leq k, \phi : F \rightarrow S^1$  com fibras  $\mathbb{E}_j$  e  $\mathbb{F}$ . Estes fibrados originam o fibrado associado  $L(E_1, \dots, E_k; \phi) : L(E_1, \dots, E_k; F) \rightarrow S^1$  com fibra  $L(\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_k; \mathbb{F})$  com uma norma induzida pelas métricas em  $\pi_j$  e  $\phi$  tal que  $|L(X_1, \dots, X_k)| \leq |L| \|X_1\| \dots \|X_k\|$ . Temos também inclusões canônicas

$$H^1(L(E_1, \dots, E_k; F)) \hookrightarrow L(H^0(E_1), H^1(E_2), \dots, H^1(E_k); H^0(F))$$

$$H^1(L(E_1, \dots, E_k; F)) \hookrightarrow L(H^1(E_1), \dots, H^1(E_k); H^1(F))$$

dadas por

$$A(t) \mapsto \tilde{A} : (X_1, \dots, X_k) \mapsto A(t)(X_1(t), \dots, X_k(t))$$

**Lema 6.1.2.** As inclusões são lineares e contínuas.

**Dem.:** Provaremos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}\|\tilde{A}(X_1, \dots, X_k)\|_0^2 &\leq 2^k \|A\|_1^2 \|X_1\|_0^2 \|X_2\|_1^2 \dots \|X_k\|_1^2 \\ \|\tilde{A}(X_1, \dots, X_k)\|_1^2 &\leq C \|A\|_1^2 \|X_1\|_1^2 \dots \|X_k\|_1^2\end{aligned}$$

onde  $C$  é uma constasnte. De fato

$$\|\tilde{A}(X_1, \dots, X_k)\|_0^2 \leq \|A\|_\infty^2 \|X_1\|_0^2 \|X_2\|_\infty^2 \dots \|X_k\|_\infty^2 \leq 2^k \|A\|_1^2 \|X_1\|_0^2 \|X_2\|_1^2 \dots \|X_k\|_1^2$$

usando o lema 6.1.1 na última desigualdade. Agora observe que

$$\nabla(A(X_1, \dots, X_k)) = (\nabla A)(X_1, \dots, X_k) + A(\nabla X_1, X_2, \dots, X_k) + \dots + A(X_1, \dots, \nabla X_k)$$

Usando a desigualdade  $(\sum_1^l a_i)^2 \leq l \sum_1^l a_i^2$  e o mesmo tipo de procedimento usado na primeira parte temos

$$\begin{aligned}\|\nabla \tilde{A}(X_1, \dots, X_k)\|_0^2 &\leq (k+1)2^k \left( \|\nabla A\|_0^2 \|X_1\|_1^2 \dots \|X_k\|_1^2 + \|A\|_1^2 \|\nabla X_1\|_0^2 + \|X_2\|_1^2 + \dots + \|X_k\|_1^2 + \dots + \right. \\ &\quad \left. \|A\|_1^2 + \|X_1\|_1^2 + \dots + \|\nabla X_k\|_0^2 \right) \leq C \|A\|_1^2 \|X_1\|_1^2 \dots \|X_k\|_1^2\end{aligned}$$

□

**Proposição 6.1.2.** Seja  $\pi : E \rightarrow S^1$  um fibrado vetorial de dimensão finita e  $O \subset E$  um aberto tal que  $O_t = O \cap \pi^{-1}(t) \neq \emptyset \forall t \in S^1$ . Então o conjunto  $H^1(O) = \{X \in H^1(E); X(t) \in O_t \forall t\}$  é aberto em  $H^1(E)$ .

**Dem.:** Tome  $X \in H^1(O)$ . Existe  $\varepsilon > 0$  tal que, se  $Y \in H^1(E)$  e  $\|Y(t) - X(t)\|^2 < 2\varepsilon^2 \forall t$ , então  $Y(t) \in O_t \forall t$ . Agora segue do lema 6.1.1 que  $\|Y - X\|_1^2 \leq \varepsilon \Rightarrow Y \in H^1(O)$ .

□

**Proposição 6.1.3.** Sejam  $\pi : E \rightarrow S^1$  e  $\kappa : F \rightarrow S^1$  fibrados vetoriais de dimensão finita com métrica e conexão riemanniana e  $O$  aberto em  $E$ . Considere uma aplicação  $\psi : O \rightarrow F$  diferenciável tal que  $\kappa \circ \psi = \pi$ . Então a aplicação induzida

$$\tilde{\psi} : H^1(O) \rightarrow H^1(F) \quad X(t) \mapsto \psi \circ X(t)$$

é contínua.

**Dem.:** Comece por observar que se  $\|X - Y\|_1$  vai zero, o mesmo acontece com  $\|X - Y\|_\infty$  e  $\|\nabla X - \nabla Y\|_0$  e que  $\|\tilde{\psi}(X) - \tilde{\psi}(Y)\|_0 \leq \|\tilde{\psi}(X) - \tilde{\psi}(Y)\|_\infty$ . Decomponha  $X'$  em sua parte vertical e horizontal,  $X'(t) = X'_h(t) + X'_v(t)$  e veja que localmente  $X'_h$  é da forma  $(t, X(t), \partial t, -\Gamma_i(\partial t, X(t)))$ , ou seja, depende apenas de  $X(t)$ . Por outro,  $X'_v$  pode ser identificada com  $\nabla X(t)$ . Se decomposermos  $d\psi(X(t)) = d_1\psi(X(t)) + d_2\psi(X(t))$  nas suas componentes horizontal e vertical (respectivamente) temos

$$\begin{aligned}\nabla(\psi \circ X)(t) - \nabla(\psi \circ Y)(t) &= d_2\psi(X(t)) \nabla X(t) - d_2\psi(Y(t)) \nabla Y(t) = \\ &= d_2\psi(X(t)) (\nabla X(t) - \nabla Y(t)) + (d_2\psi(X(t)) - d_2\psi(Y(t))) \nabla Y(t)\end{aligned}$$

a menos de termos que vão a zero junto com  $\|X - Y\|_\infty$ . Logo  $\|\nabla \tilde{\psi}(X) - \nabla \tilde{\psi}(Y)\|_0$  também tende a zero.

□



**Lema 6.1.3.** Seja  $\psi : O \subset E \rightarrow E$  como na proposição anterior. Então  $\tilde{\psi}$  é diferenciável e  $d\tilde{\psi} = (\widetilde{d_2\psi})$ .

**Dem.:** A fórmula de Taylor para  $\psi$  nos dá

$$\psi(X(t)) - \psi(Y(t)) - d_2\psi(Y(t))(X(t) - Y(t)) = r(Y(t), X(t))(X(t) - Y(t))$$

sendo que

$$r(Y(t), X(t)) = \int_0^1 d_2\psi(Y(t) + s(X(t) - Y(t)))ds - d_2\psi(Y(t))$$

é uma aplicação fibrada de  $O' \times O' \subset O \times O \subset E \times E$ , com  $O'$  convexo, no fibrado  $L(E; F) \rightarrow S^1$ . A proposição anterior nos diz que  $\tilde{r} : H^1(O' \times O') \rightarrow H^1(L(E; F))$  é contínua e, como  $r(Y(t), Y(t)) = 0$ , o resultado segue. □

**Observação:** Analogamente se obtém  $d^k\tilde{\psi} = (\widetilde{d_2^k\psi})$ .

O lema seguinte é um resultado básico de geometria riemanniana.

**Lema 6.1.4.** Seja  $\exp : TM \rightarrow M$  a aplicação exponencial. Existe uma vizinhança  $O$  da seção nula em  $TM$  tal que  $(\pi, \exp) : O \rightarrow M \times M$  é um difeomorfismo sobre uma vizinhança da diagonal de  $M \times M$ .

Assim, dados  $O$  como no lema acima e  $c \in C^\infty(S^1, M)$ , considere  $O_c = (c_\pi^*)^{-1}(O)$  que é uma vizinhança da seção nula em  $c^*TM$  e defina

$$\exp_c : H^1(O_c) \rightarrow \Lambda M \quad \text{por} \quad \exp_c(X)(t) = \exp(c_\pi^*(X(t)))$$

É claro que  $\exp_c$  é injetiva e que a imagem de  $\exp_c$  é  $O_c = \{b \in \Lambda M; b(t) \in \exp(O \cap T_{c(t)}M)\}$ .

**Lema 6.1.5.** Se  $b, c \in C^\infty(S^1, M)$ , a aplicação

$$\exp_b^{-1} \circ \exp_c : \exp_c^{-1}(O_c \cap O_b) \rightarrow \exp_b^{-1}(O_c \cap O_b)$$

é um difeomorfismo

**Dem.:** A demonstração consiste de arranjos de notação afim de se usar o lema 6.1.3. Vamos a eles. Defina

$$O_{c,t} = O_c \cap (\pi_c^*)^{-1}(t) \quad O_{c,b,t} = O_{c,t} \cap \left( (\exp \circ c_\pi^*)^{-1} \circ (\exp \circ b_\pi^*)(O_{b,t}) \right)$$

$$O_{c,b} = \bigcup_t O_{c,b,t} \quad \text{se} \quad O_{c,b,t} \neq \emptyset \quad \forall t. \quad \text{Caso contrário defina} \quad O_{c,b} = \emptyset$$

Assim  $O_{c,b}$  é aberto em  $O_c$  e  $H^1(O_{c,b}) = \exp_c^{-1}(O_c \cap O_b)$ . Então, a aplicação

$$\psi_{b,c} = (\exp \circ b_\pi^*)^{-1} \circ (\exp \circ c_\pi^*) : O_{c,b} \rightarrow b^*TM$$

fibra e  $\tilde{\psi}_{b,c} = \exp_b^{-1} \circ \exp_c$ . Agora use o referido lema. □

Agora estamos prontos para o

**Teorema 6.1.4.**  $\Lambda M$  é uma variedade de Hilbert com estrutura diferencial dada pelo atlas  $(\exp_c, H^1(O_c))$  com  $c \in C^\infty(S^1, M)$ .

**Observação:** O único ponto básico ainda não observado para a demonstração do teorema é que  $C^\infty(S^1, M)$  é denso em  $\Lambda M$ . Ainda há uma parte técnica se quisermos uma base enumerável para o atlas. Para tanto refira-se a [5].

Agora, para  $(x, v) \in O$  ( $O$  como no lema 6.1.4), considere a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \nabla_2 \exp(x, v) : T_x M &\longrightarrow T_{\exp(x, v)} M \\ (x, u) &\mapsto d \exp_{(x, v)} \circ (K|_{T_{(x, v)}^v TM})^{-1} u \end{aligned}$$

onde  $K$  é conexão riemanniana de  $M$ .

**Observação:** Veja que  $K|_{T_{(x, v)}^v TM} : T_{(x, v)}^v TM \rightarrow T_x M$  é a identificação canônica do espaço tangente à fibra  $T_x M$  com ela própria. É claro então que  $\nabla_2 \exp(x, v)$  é um homeomorfismo linear.

Para  $i = 0, 1$  defina

$$H^i(\Lambda M^* TM) = \bigcup_{\Lambda M} H^i(c^* TM)$$

e

$$p_i : H^i(\Lambda M^* TM) \rightarrow \Lambda M \quad p_i(X)(t) = \pi(X(t))$$

**Proposição 6.1.5.** As aplicações  $p_i$  acima têm a estrutura de fibrado vetorial sobre  $\Lambda M$  sendo que  $p_1 : H^1(\Lambda M^* TM) \rightarrow \Lambda M$  é isomorfo ao fibrado tangente de  $\Lambda M$ .

**Dem.:** Considere

$$\begin{aligned} \Phi_c^i : H^1(O_c) \times H^i(c^* TM) &\longrightarrow p_i^{-1}(O_c) \\ (X(t), Y_c(t)) &\mapsto \nabla_2 \exp(c_\pi^*(X(t))) Y_c(t) \end{aligned}$$

Começemos por  $i = 1$ . Observe que  $(\Phi_b^1)^{-1} \circ \Phi_c^1$  é da forma  $(\tilde{\psi}_{b,c}, \widetilde{(d_2 \psi_{b,c})})$  onde  $\psi_{b,c}$  é aquela definida na demonstração do lema 6.1.5. Assim,  $(\Phi_c^1, \exp_c, H^1(O_c))$  definem representações locais para  $p_1 : H^1(\Lambda M^* TM) \rightarrow \Lambda M$  e, como  $\widetilde{d_2 \psi_{b,c}} = d\tilde{\psi}_{b,c}$ , segue que  $p_1$  é a projeção canônica  $T\Lambda M \rightarrow \Lambda M$ .

Para  $i = 0$ , veja que  $\widetilde{d_2 \psi_{b,c}}$  seguida da inclusão

$$H^1(L(c^* TM; b^* TM)) \hookrightarrow L(H^0(c^* TM); H^0(b^* TM))$$

é diferenciável (use o lema 6.1.2). Então  $(\Phi_c^0, \exp_c, H^1(O_c))$  define a estrutura local do fibrado.  $\square$

Mais definições. Como temos  $\nabla_2 \exp$ , também temos o isomorfismo

$$\begin{aligned} \nabla_1 \exp(x, v) : T_x M &\longrightarrow T_{\exp(x, v)} M \\ (x, u) &\mapsto d \exp_{(x, v)} \circ (d\pi|_{T_{(x, v)}^h TM})^{-1} u \end{aligned}$$

e, combinando ambos

$$\theta : O \rightarrow L(TM; TM) \quad \theta(x, v) = \left( \nabla_2 \exp(x, v) \right)^{-1} \circ \left( \nabla_1 \exp(x, v) \right)$$

Como  $c' \in H^0(c^*TM)$  se  $c \in \Lambda M$ , temos uma seção natural

$$\partial : \Lambda M \rightarrow H^0(\Lambda M^*TM)$$

Então definimos  $\theta_c : O_c \rightarrow c^*TM$  por

$$\theta_c = c_\pi^{*-1} \circ \theta \circ c_\pi^*(.) \partial c$$

**Proposição 6.1.6.**  $\partial$  é um seção diferenciável de  $p_0 : H^0(\Lambda M^*TM) \rightarrow \Lambda M$  que em coordenadas locais tem a parte principal,  $\partial_c : H^1(O_c) \rightarrow H^0(c^*TM)$ , da forma

$$\partial_c X(t) = \nabla_c X(t) + \theta_c(X(t))$$

**Dem.:** Seja  $b(t) = \exp(c_\pi^* X(t))$ . Então

$$\partial b(t) = d \exp_{c_\pi^* X(t)} \left( c_\pi^*(X'_h(t)) + c_\pi^*(X'_v(t)) \right)$$

Como  $d\pi c_\pi^*(X'_h(t)) = \partial c(t)$  e  $K c_\pi^*(X'_v(t)) = \nabla c_\pi^*(X(t))$ , temos

$$\partial b(t) = \nabla_1 \exp(c_\pi^* X(t)) \partial c(t) + \nabla_2 \exp(c_\pi^* X(t)) = \nabla_2 \exp(c_\pi^* X(t)) \circ c_\pi^* \left( \nabla_c X(t) + \theta_c(X(t)) \right)$$

□

Se  $c \in C^\infty(S^1, M)$  e  $X \in H^0(c^*TM)$  temos a induzida

$$\tilde{\theta}_c(X)(t) = c_\pi^{*-1} \circ \theta(c_\pi^* X(t)) c'(t)$$

e

$$\Phi_c^0 \circ \partial \circ \exp_c(X) = (X, \partial_c X) = (X, \nabla_c X + \tilde{\theta}_c X)$$

A proposição a seguir, cujos detalhes são encontrados em [5], caracteriza uma métrica riemanniana para os fibrados  $p_i : H^i(\Lambda M^*TM) \rightarrow \Lambda M$ .

**Proposição 6.1.7.** Os fibrados  $p_i : H^i(\Lambda M^*TM) \rightarrow \Lambda M$  possuem uma (única) métrica riemanniana que coincide com  $\langle, \rangle_i$  em  $p_i^{-1}(c) = H^i(c^*TM)$ .

**Observação:** Em vista desta proposição, as métricas em  $p_i$  continuarão sendo denotadas por  $\langle, \rangle_i$ .

Concluída a construção de  $\Lambda M$ , passemos a estudar mais um pouco de problemas variacionais.

**Definição 6.1.3.** Um problema variacional regular sobre  $M$  é uma aplicação  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

1.  $L$  é  $C^1$  em  $TM$  e  $C^\infty$  fora da seção nula.
2. A derivada de  $L$  sobre as fibras  $d_f L : TM \rightarrow T^*M$  é regular fora seção nula
3.  $L(x, v) \geq 0$ .

Considere em  $M$  uma estrutura de Finsler, i.e., uma aplicação não negativa  $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

1.  $F$  é  $C^\infty$  fora da seção nula.
2.  $F^2$  é  $C^1$  em  $TM$ .
3.  $F(tX) = tF(X) \forall t \geq 0$ .

Se  $L_0 = F^2$  for um problema variacional regular diremos que  $M$  é uma variedade de Finsler regular.

**Observação:** Um fato importante a ser observado é que  $L_0$  é  $C^2$  se, e somente se,  $F$  for a norma de uma métrica riemanniana em  $M$ . Veja em [31].

Associado ao problema variacional  $L_0$  temos  $\tilde{L}_0 : \Lambda M \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tilde{L}_0(c) = \frac{1}{2} \int_{S^1} L_0(c'(t)) dt$$

chamada de energia integral de  $M$  (Compare com a seção 4.3).

**Proposição 6.1.8.**  $\tilde{L}_0$  é  $C^{2-}$ .

**Dem.:** Precisaremos do seguinte lema

**Lema 6.1.6.** Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma função contínua,  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e positiva homogênea de grau  $k$ , i.e.,  $f(tx) = t^k f(x) \forall t \geq 0$ , então, para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , valem

1. Se  $k = 1$ , existe uma constante  $c_0$  com  $\|f(x) - f(y)\| \leq c_0 \|x - y\|$ .
2. Se  $k = 2$ , existem constantes  $c_1, c_2$  tais que  $\|f(x) - f(y)\| \leq c_1 \|x - y\|^2 + c_2 \|x - y\| \|y\|$ .

Basta ver que, se  $tx + (1-t)y \neq 0 \forall t \in [0, 1]$ , temos  $\|f(x) - f(y)\| \leq \|f'(tx + (1-t)y)\| \|x - y\|$  pelo teorema do valor médio. Agora, se  $k = 1$ ,  $\|f'(tx + (1-t)y)\|$  é limitada e, se  $k = 2$ ,  $\|f'(tx + (1-t)y)\| \leq C\|(tx + (1-t)y)\|$ .

Tome  $c \in C^\infty(S^1, M)$ ,  $(\exp_c, H^1(O_c))$  uma carta ao redor de  $c$  e defina  $\tilde{L}_{0c} = \tilde{L}_0 \circ \exp_c$ .  $\tilde{L}_{0c}$  é a composição seguinte

$$H^1(O_c) \xrightarrow{1 \times \partial_t} H^1(O_c) \times H^0(c^*TM) \xrightarrow{\tilde{\lambda}_c} L^1(S^1) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

onde  $\tilde{\lambda}_c$  é a induzida por  $\lambda_c : O_c \times c^*TM \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$  dada a seguir

$$\lambda_c(\xi, \eta) = (\pi_c^*(\xi), L_0(\nabla_2 \exp(c_\pi^* \xi) c^* \eta))$$

Assim, será suficiente mostrar que  $\tilde{\lambda}_c$  é  $C^{2-}$ . Tome  $(X, Y) \in H^1(O_c) \times H^0(c^*TM)$  e veja que

$$\int_{S^1} L_0(\nabla_2 \exp(c_\pi^* X(t)) c_\pi^* Y(t)) dt \leq \text{cte} \int_{S^1} \|\nabla_2 \exp(c_\pi^* X(t))\|^2 \|Y(t)\|^2 dt$$

que é limitada já que  $\|X(t)\|_\infty$  é pequena e  $Y \in H^0(c^*TM) = L^2(c^*TM)$ , portanto  $\tilde{\lambda}_c$  está bem definida.

Considere, para cada  $t$ , a restrição de  $\lambda_c$  à fibra  $\lambda_t : (O_c)_t \times (c^*TM)_t \rightarrow \mathbb{R}$ . Se denotarmos por  $\xi, \eta$  a 1ª e 2ª variáveis respectivamente temos

- $\lambda_t$  e  $\frac{\partial \lambda_t}{\partial \xi}$  são positivas homogêneas de grau 2 em  $\eta$ .
- $\frac{\partial \lambda_t}{\partial \eta}$  é positiva homogênea de grau 1 em  $\eta$ .

Tomemos  $(X_1, Y_1) \in H^1(O_c) \times H^0(c^*TM)$  (pequenos). Para algum  $s \in [0, 1]$  temos

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{\lambda}_c(X + X_1, Y + Y_1) - \tilde{\lambda}_c(X, Y) - d_f \lambda_c(X(t), Y(t))(X_1(t), Y_1(t))\|_{L^1} = \\
& \int_{S^1} \left\| \left( d_f \lambda_c(X(t) + sX_1(t), Y(t) + sY_1(t)) - d_f \lambda_c(X(t), Y(t)) \right) (X_1(t), Y_1(t)) \right\| dt \leq \\
& \int_{S^1} \left\| \frac{\partial \lambda_t}{\partial \xi}(X(t) + sX_1(t), Y(t) + sY_1(t)) - \frac{\partial \lambda_t}{\partial \xi}(X(t), Y(t)) \right\| \|X_1(t)\| dt + \\
& \int_{S^1} \left\| \frac{\partial \lambda_t}{\partial \eta}(X(t) + sX_1(t), Y(t) + sY_1(t)) - \frac{\partial \lambda_t}{\partial \eta}(X(t), Y(t)) \right\| \|Y_1(t)\| dt \leq \\
& \|X_1\|_\infty \int_{S^1} \left\| \frac{\partial \lambda_t}{\partial \xi}(X(t) + sX_1(t), Y(t) + sY_1(t)) - \frac{\partial \lambda_t}{\partial \xi}(X(t), Y(t)) \right\| dt + \\
& \|Y_1\|_0 \left( \int_{S^1} \left\| \frac{\partial \lambda_t}{\partial \eta}(X(t) + sX_1(t), Y(t) + sY_1(t)) - \frac{\partial \lambda_t}{\partial \eta}(X(t), Y(t)) \right\|^2 dt \right)^{1/2} \leq \\
& \|X_1\|_\infty \int_{S^1} \left\| \frac{\partial \lambda_t}{\partial \xi}(X(t) + sX_1(t), Y(t) + sY_1(t)) - \frac{\partial \lambda_t}{\partial \xi}(X(t), Y(t) + sY_1(t)) \right\| dt + \\
& \|X_1\|_\infty \int_{S^1} \left\| \frac{\partial \lambda_t}{\partial \xi}(X(t), Y(t) + sY_1(t)) - \frac{\partial \lambda_t}{\partial \xi}(X(t), Y(t)) \right\| dt + \\
& \|Y_1\|_0 \left( \int_{S^1} \left\| \frac{\partial \lambda_t}{\partial \eta}(X(t) + sX_1(t), Y(t) + sY_1(t)) - \frac{\partial \lambda_t}{\partial \eta}(X(t), Y(t) + sY_1(t)) \right\|^2 dt + \right. \\
& \left. \int_{S^1} \left\| \frac{\partial \lambda_t}{\partial \eta}(X(t), Y(t) + sY_1(t)) - \frac{\partial \lambda_t}{\partial \eta}(X(t), Y(t)) \right\|^2 dt + \right. \\
& \left. 2 \int_{S^1} \left\| \frac{\partial \lambda_t}{\partial \eta}(X(t) + sX_1(t), Y(t) + sY_1(t)) - \frac{\partial \lambda_t}{\partial \eta}(X(t), Y(t) + sY_1(t)) \right\| \left\| \frac{\partial \lambda_t}{\partial \eta}(X(t), Y(t) + sY_1(t)) - \frac{\partial \lambda_t}{\partial \eta}(X(t), Y(t)) \right\| dt \right)^{1/2} \\
& \leq \|X_1\|_\infty \left( \int_{S^1} c_1 \|X_1(t)\| dt + \int_{S^1} c_2 \|Y_1(t)\| (\|Y(t)\| + \|Y_1(t)\|) dt \right) + \\
& \|Y_1\|_0 \left( \int_{S^1} c_3 \|X_1(t)\|^2 dt + \int_{S^1} c_4 \|Y_1(t)\|^2 dt + \int_{S^1} c_5 \|X_1(t)\| \|Y_1(t)\| dt \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Na última desigualdade usamos o lema 6.1.6. Assim segue que  $\tilde{\lambda}_c$  é diferenciável e também que  $d\tilde{\lambda}_c(X, Y)(t) = d_f \lambda_c(X(t), Y(t))$ . Com cálculos análogos mostra-se que  $\tilde{\lambda}_c$  é  $C^{2-}$ . □

**Observação:** Explicitamente temos  $d\tilde{L}_{0c}(X)Y = \int d\tilde{\lambda}_c(X(t), \partial_c X(t))(Y(t), \nabla_c Y(t) + d\tilde{\theta}_c(X)Y(t))$ . Além de ser  $C^{2-}$ ,  $\tilde{L}_0$  é duas vezes fortemente diferenciável nos pontos críticos e a segunda derivada tem núcleo de dimensão finita (veja em [10]).

Suponha que  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função  $C^2$ . Como  $M$  é compacta podemos supor que  $V \geq 0$ . Considere então o problema variacional regular  $L(x, v) = L_0(x, v) + V(x)$  e o induzido  $\tilde{L}(c) = \tilde{L}_0(c) + \int_{S^1} V(c(t)) dt = \tilde{L}_0(c) + \tilde{V}(c)$ . Gostaríamos de ter novamente que  $\tilde{L} \in C^{2-}$ , porém não temos mais as homogeneidades usadas na demonstração que  $\tilde{L}_0$  era  $C^{2-}$ . Para solucionar tal problema somos levados à seguinte definição.

**Definição 6.1.4.** Um problema variacional super regular sobre  $M$  é uma aplicação  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

1.  $L$  é  $C^1$  em  $TM$  e  $C^\infty$  fora da seção nula.
2. A derivada de  $L$  sobre as fibras  $d_f L : TM \rightarrow T^*M$  é regular fora seção nula
3.  $L(x, v) \geq 0$ .
4. Para  $c \in C^\infty(S^1, M)$  temos  $L \circ c' \in L^1(S^1)$  e uma aplicação  $A : L^1(S^1) \rightarrow L^1(S^1)$  que leva conjuntos limitados em conjuntos limitados e tal que  $\|c'\|_0^2 \leq \|A(L \circ c')\|$ .
5. Existem operadores  $B, C : L^2(S^1) \rightarrow L^2(S^1)$  que fixam o 0 e são contínuos ali tais que

$$\left\| \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), v(t)) - \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), u(t)) \right\|_0 \leq \|B(v(t) - u(t))\|_0$$

$$\left\| \frac{\partial L}{\partial v}(x(t), v(t)) - \frac{\partial L}{\partial v}(x(t), u(t)) \right\|_0 \leq \|C(v(t) - u(t))\|_0$$

6.  $\int_{S^1} (d_f^2 L)(x)(v)(v) \geq k_0 \|v\|_0^2$ .

Novamente, associado a um problema variacional super regular  $L$  temos a energia integral  $\tilde{L} : \Lambda M \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Proposição 6.1.9.** Se  $L$  é problema variacional super regular,  $\tilde{L}$  é  $C^{2-}$ .

**Dem.:** Basta repetir a demonstração da proposição 6.1.8 usando as propriedades de um problema variacional super regular no lugar do lema 6.1.6 que explorava a homogeneidade de  $\tilde{L}_0$ .

**Proposição 6.1.10.** Se  $c_n \in \Lambda M$  é tal que  $\tilde{L}(c_n) \leq B_0$ , então  $\{c_n\}$  possui uma subsequência convergindo uniformemente, i.e.,  $\tilde{L}$  é própria na norma do sup.

**Dem.:** Seja  $d_M$  a distância em  $M$ . Temos

$$d_M(c_k(t_0), c_k(t_1))^2 \leq \left( \int_{t_0}^{t_1} \|c'_k(t)\| dt \right)^2 \leq C B_0 |t - t_0|$$

Logo a sequência é equicontínua e o resultado segue por Arzela-Ascoli usando-se a compacidade de  $M$ . □

$\tilde{L}$  induz um campo gradiente  $C^{1-}$ ,  $\nabla \tilde{L}$ , em  $\Lambda M$  caracterizado por

$$\langle \nabla \tilde{L}(c), X \rangle_1 = d\tilde{L}(c)X$$

onde  $X \in T_c \Lambda M$ .

**Teorema 6.1.11.** Suponha que  $\{c_n\} \subset \Lambda M$  seja tal que  $\tilde{L}(c_k) \leq B_0$  e  $\inf\{\|\nabla \tilde{L}(c_k)\|_1\} = 0$ . Então  $\{c_n\}$  possui uma subsequência convergindo em  $\Lambda M$ , i.e.,  $\tilde{L}$  satisfaz a condição (C). Naturalmente que tal limite é um ponto crítico de  $\tilde{L}$ .

**Dem.:** Usando a proposição 6.1.10 podemos supor que  $\{c_n\}$  converge uniformemente para  $c_0$  em  $C^0(S^1, M)$ . Escolha  $c \in C^\infty(S^1, M)$  próxima o suficiente de  $c_0$  de modo que eventualmente todas

as  $c_n$  estejam em  $\mathcal{O}_c$ . Defina  $X_n = \exp_c^{-1}(c_n)$ . Queremos mostrar que  $\|X_n - X_m\|_1 \rightarrow 0$  quando  $n, m \rightarrow \infty$ . Usando a proposição 6.1.6 temos

$$\|X_n - X_m\|_1^2 \leq \|X_n - X_m\|_0^2 + \|\tilde{\theta}_c X_n - \tilde{\theta}_c X_m\|_0^2 + \|\partial_c X_n - \partial_c X_m\|_0^2$$

Como  $\|X_n - X_m\|_0 \leq \|X_n - X_m\|_\infty$  esta parte vai a zero. Por motivo análogo (basta ver a definição de  $\theta$ ) também  $\|\tilde{\theta}_c X_n - \tilde{\theta}_c X_m\|_0$  vai a zero se  $\|X_n - X_m\|_\infty$  for. Resta ver  $\|\partial_c X_n - \partial_c X_m\|_0$ .

Mas  $\|\partial_c X_n\|_0^2 \leq k\tilde{L}_c(X_n) \leq kB_0 \Rightarrow \|\partial_c X_n - \partial_c X_m\|_0^2$  é limitada. Agora

$$\begin{aligned} d\tilde{L}_c(X_n)(X_n - X_m) - d\tilde{L}_c(X_m)(X_n - X_m) = \\ \int_{S^1} d\tilde{\lambda}_c(X_n, \partial_c X_n)(0, \partial_c X_n - \partial_c X_m) - \int_{S^1} d\tilde{\lambda}_c(X_m, \partial_c X_m)(0, \partial_c X_n - \partial_c X_m) + \\ \int_{S^1} d\tilde{\lambda}_c(X_n, \partial_c X_n)(X_n - X_m, \tilde{\theta}_c X_m - \tilde{\theta}_c X_n + d\tilde{\theta}_c(X_n)(X_n - X_m)) - \\ \int_{S^1} d\tilde{\lambda}_c(X_m, \partial_c X_m)(X_n - X_m, \tilde{\theta}_c X_m - \tilde{\theta}_c X_n + d\tilde{\theta}_c(X_m)(X_n - X_m)) \end{aligned}$$

Então a expressão de  $d\tilde{\lambda}_c$  nos diz que as duas últimas integrais vão a zero se  $\|X_n - X_m\|_\infty$  for. Já a segunda integral pode ser aproximada, a menos de fatores que vão a zero com  $\|X_n - X_m\|_\infty$ , por  $\int_{S^1} d\tilde{\lambda}_c(X_n, \partial_c X_m)(0, \partial_c X_n - \partial_c X_m)$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \int_{S^1} d\tilde{\lambda}_c(X_n, \partial_c X_n)(0, \partial_c X_n - \partial_c X_m) - d\tilde{\lambda}_c(X_n, \partial_c X_m)(0, \partial_c X_n - \partial_c X_m) = \\ \int_{S^1} \frac{\partial \lambda_t}{\partial \eta}(X_n(t), \partial_c X_n(t))(\partial_c X_n(t) - \partial_c X_m(t)) - \frac{\partial \lambda_t}{\partial \eta}(X_n(t), \partial_c X_m(t))(\partial_c X_n(t) - \partial_c X_m(t)) dt \end{aligned}$$

A menos de uma aproximação uniforme, podemos supor que para  $t, s \in [0, 1]$  temos  $s\partial_c X_n(t) + (1-s)\partial_c X_m(t) \neq 0$  e, então, usamos o teorema do valor médio para ver que a última integral é igual a

$$\begin{aligned} \int_{S^1} \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial \eta^2}(X_n(t), s\partial_c X_n(t) + (1-s)\partial_c X_m(t))(\partial_c X_n(t) - \partial_c X_m(t))^2 \geq \\ k_0 \int_{S^1} \|\partial_c X_n(t) - \partial_c X_m(t)\|^2 = k_0 \|\partial_c X_n(t) - \partial_c X_m(t)\|_0^2 \end{aligned}$$

sendo que a última desigualdade vem da regularidade de  $d_f L$ .

□

## 6.2 Lema de Morse para Pontos Críticos Degenerados

Seja  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^1$  definida no espaço de Hilbert  $\mathbb{H}$ . Suponha que  $f$  seja duas vezes diferenciável em 0 e seja  $\mathbb{N}$  o núcleo da aplicação  $A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  dada por

$$\langle Av, u \rangle = d^2 f_0(v, u)$$

Se a imagem  $\mathcal{I}m(A)$  for fechada, como  $A$  é simétrica,  $\mathbb{N}^\perp = \mathcal{I}m(A)$  e  $\mathbb{H}$  se decompõe em  $\mathbb{H} = \mathbb{N}^\perp \oplus \mathbb{N}$ . Podemos olhar então  $z \in \mathbb{H}$  como  $x + y \in \mathbb{N}^\perp \oplus \mathbb{N}$

**Lema 6.2.1.** Nas condições e notação acima, suponha que 0 seja um ponto crítico de  $f$  e que  $f$  seja fortemente diferenciável na origem. Então, existe uma função contínua  $g : U_1 \subset \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^\perp$  em um aberto  $U_1$  contendo 0 tal que  $\frac{\partial f}{\partial x}(g(y), y) \equiv 0$ ,  $g(0) = 0$  e  $g$  é fortemente diferenciável na origem com  $dg_0 = 0$ .

**Dem.:** Basta usar o teorema da função implícita para funções fortemente diferenciáveis.

**Observação:** Se escrevermos  $f(z) = f(x, y)$  e olharmos para as restrições de  $f$  aos planos  $\mathbb{N}^\perp \times \{y\}$ , a função  $g$  da proposição anterior está dando uma parametrização dos pontos críticos de tais restrições numa vizinhança da origem de  $\mathbb{H}$ .

**Lema 6.2.2.** Nas condições anteriores, existe uma vizinhança  $\mathcal{V}$  de 0 em  $\mathbb{H}$  e um homeomorfismo  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \varphi(\mathcal{V}) \subset \mathbb{H}$  tal que

$$f(\varphi(x, y)) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + f(g(y), y) \quad \text{e} \quad d\varphi_0 = I$$

onde  $g$  é função do lema anterior.

**Dem.:** Defina  $h_1 : \mathbb{N}^\perp \oplus U_1 \rightarrow \mathbb{N}^\perp \oplus \mathbb{N}$  por

$$h_1(x, y) = x + g(y) + y$$

É claro que  $h_1$  é fortemente diferenciável na origem e  $dh_1(0, 0) = I$ , logo,  $h_1$  é um homeomorfismo de uma vizinhança  $V_1$  da origem em  $\mathbb{H}$  em outra vizinhança da origem  $W_1 = h_1(V_1)$ .

**Observação:** Veja que tudo o que  $h_1$  faz é transportar um aberto de  $\{0\} \times \mathbb{N}$  na superfície parametrizada  $\{(g(y), y); y \in U_1 \subset \mathbb{N}\}$ .

A partir de agora estaremos a procura de um homeomorfismo  $h_2 : V_2 \subset \mathbb{H} \rightarrow h_2(V_2)$ , tal que, se  $\varphi = h_1 \circ h_2$ , então

$$f(\varphi(x, y)) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + f(g(y), y)$$

**Observação:** Como  $A|_{\mathbb{N}^\perp}$  é um isomorfismo, podemos escrever  $\mathbb{N}^\perp = \mathbb{H}_- \oplus \mathbb{H}_+$  onde  $\mathbb{H}_-$  e  $\mathbb{H}_+$  são os subespaços  $A$ -invariantes nos quais  $A$  é negativa definida e positiva definida respectivamente. Dessa forma temos  $\mathbb{H} = \mathbb{H}_- \oplus \mathbb{H}_+ \oplus \mathbb{N}$  e  $z = x + y$  com  $x = x_- + x_+$ . Podemos ainda introduzir um produto interno,  $(\cdot, \cdot)$ , equivalente ao original,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , em  $\mathbb{N}^\perp$  que torna a soma  $\mathbb{H}_- \oplus \mathbb{H}_+$  ortogonal, basta tomar

$$(u_- + u_+, v_- + v_+) = \langle Au_+, v_+ \rangle - \langle Au_-, v_- \rangle$$

A norma deste produto interno será denotada por  $|\cdot|$ .

Procuraremos  $h_2$  da forma

$$h_2(x, y) = x + \lambda(x, y)(x_+ - x_-) + y$$

onde  $\lambda$  é uma função  $\lambda : \mathbb{H} \rightarrow [-1/2, 1/2]$ . Defina

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + f(g(y), y) \quad \text{e} \quad \phi(x, y) = \psi(x, y) - f(x + g(y), y)$$

Assim teríamos



$$\begin{aligned}
f(\varphi(x, y)) &= f(x + \lambda(z)(x_+ - x_-) + g(y), y) = \psi(x + \lambda(z)(x_+ - x_-), y) - \phi(x + \lambda(z)(x_+ - x_-), y) = \\
&\frac{1}{2} \langle A(x + \lambda(z)(x_+ - x_-), x + \lambda(z)(x_+ - x_-)) \rangle + f(g(y), y) - \phi(x + \lambda(z)(x_+ - x_-), y) = \\
&\frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + f(g(y), y) + \lambda(z) \langle Ax, x_+ - x_- \rangle + \frac{1}{2} \lambda(z)^2 \langle A(x_+ - x_-), x_+ - x_- \rangle - \phi(x + \lambda(x_+ - x_-), y) =
\end{aligned}$$

$$\psi(x, y) + \lambda(z)|x|^2 + \frac{1}{2} \lambda(z)^2 \langle A(x_+ - x_-), x_+ - x_- \rangle - \phi(x + \lambda(x_+ - x_-), y)$$

e, portanto,  $f(\varphi(z)) = \psi(z)$  se, e somente se  $\lambda$  satisfizer

$$\phi(x + \lambda(z)(x_+ - x_-), y) = \lambda(z)|x|^2 + \frac{1}{2} \lambda(z)^2 \langle A(x_+ - x_-), x_+ - x_- \rangle \quad (6.2.1)$$

Agora observe que  $\phi(0, y) = 0$  e então qualquer valor atribuido a  $\lambda(0, y)$  satisfaz a equação (6.2.1) nestes pontos, em particular  $\lambda(0, y) = 0$ . Para  $x \neq 0$  e  $y \in \mathbb{N}$  fixos, considere a função  $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\Gamma(\lambda, x, y) = \frac{1}{2|x|^2} \left( 2\phi(x + \lambda(x_+ - x_-), y) - \lambda^2 \langle A(x_+ - x_-), x_+ - x_- \rangle \right)$$

Queremos achar uma vizinhança de 0 em  $\mathbb{R} \times (\mathbb{N}^\perp \oplus \mathbb{N})$  onde  $\Gamma$  seja uma contração e, consequentemente,  $\lambda = \lambda(x, y)$  será um ponto fixo de  $\Gamma$ . Começemos por estimar  $\Gamma'$ . Observe antes que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y)v = \langle Ax, v \rangle - \frac{\partial f}{\partial x}(x + g(y), y)v$$

assim  $\frac{\partial \phi}{\partial x}(0, y) = 0$  e como  $\phi'$  é fortemente diferenciável na origem segue que, dado  $\varepsilon > 0$ , se  $\|x + y\|$  for suficientemente pequena,  $\|\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y)\| \leq \varepsilon|x|$ . Agora

$$\left| \frac{\partial \Gamma}{\partial \lambda}(\lambda, x, y) \right| \leq \frac{1}{|x|^2} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x + \lambda(x_+ - x_-), y) \right\| \left| x_+ - x_- \right| + \frac{|\lambda|}{|x|^2} \left| \langle A(x_+ - x_-), x_+ - x_- \rangle \right| \leq k_1 \varepsilon + k_2 |\lambda|$$

onde  $k_1, k_2$  são constantes. Assim, se escolhermos  $\varepsilon$  suficientemente pequeno e  $|\lambda| \leq \frac{1}{4k_2}$ , por exemplo, temos  $|\Gamma'| \leq 1/2$  e, usando o teorema do valor médio,

$$|\Gamma(\lambda, x, y) - \Gamma(\lambda_0, x, y)| \leq \frac{1}{2} |\lambda - \lambda_0| \leq \frac{1}{2}$$

Observe que  $\Gamma(0, x, y) = \frac{\phi(x, y)}{|x|^2}$ , então, tomando  $\lambda_0 = 0$ , obtemos  $|\Gamma(\lambda, x, y) - \Gamma(0, x, y)| \leq \frac{1}{2} |\lambda|$  e, consequentemente,  $|\Gamma(\lambda, x, y)| \leq \left| \frac{\phi(x, y)}{|x|^2} \right| + \frac{1}{2} |\lambda|$ . Finalmente, se  $|\lambda| \leq 2 \left| \frac{\phi(x, y)}{|x|^2} \right|$ ,

$$|\Gamma(\lambda, x, y)| \leq 2 \left| \frac{\phi(x, y)}{|x|^2} \right|$$

Logo, se  $\eta(x, y) = 2 \left| \frac{\phi(x, y)}{|x|^2} \right| \leq \frac{1}{4k_2}$ ,  $\Gamma$  é uma contração do intervalo  $[-\eta, \eta]$ . Mas  $\lim_{z \rightarrow 0} \eta(x, y) = 0$ . De fato, basta observar que  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(0, 0) = 0$  assim como  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$ , logo, pela diferenciabilidade forte de  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  em 0, se  $\|x + y\|$  for suficientemente pequena

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) \right\| = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(0, y) \right\| \leq \varepsilon|x|$$

Agora é só usar a desigualdade do valor médio

$$\|\phi(x, y)\| = \|\phi(x, y) - \phi(0, y)\| \leq |x| \sup \left\{ \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x}(tx, y) \right\|; t \in [0, 1] \right\} \leq \varepsilon |x|^2$$

**Observação:**  $\lambda$  assim obtida é limitada em toda uma vizinhança de 0 e só não é contínua, possivelmente, nos pontos  $(0, y)$ . Como  $\lambda(x, y) \in [-\eta(x, y), \eta(x, y)]$  segue que  $\lambda$  é contínua em 0. Mas  $h_2$  é contínua mesmo onde  $\lambda$  não o for :

$$|h_2(x, y) - h_2(0, y_0)| = |(1 + \lambda)x_+| + |(1 - \lambda)x_-| + |y - y_0|$$

Assim como  $h_1$ ,  $h_2$  é diferenciável na origem e  $dh_2(0) = I$ . De fato,  $|h_2(x, y) - x - y| = |\lambda(x, y)| |x|$ , e a diferenciabilidade segue da continuidade de  $\lambda$  em 0. Todavia, não podemos garantir a diferenciabilidade forte de  $h_2$  em 0 e assim teremos que exibir explicitamente a inversa  $h_3$  de  $h_2$ . Escolhendo uma vizinhança de 0 em  $\mathbb{H}$  de modo que  $|\lambda(x, y)| < 1/2$ , a função  $h_3$  definida abaixo é a função que procuramos

$$h_3(x, y) = \frac{1}{1 + \lambda(x, y)} x_+ + \frac{1}{1 - \lambda(x, y)} x_- + y$$

Começemos verificando a continuidade de  $h_3$ . A continuidade é clara em toda vizinhança exceto nos pontos  $(0, y)$ . Para eles temos

$$|h_3(x, y) - h_3(0, y_0)|^2 = \left| \frac{1}{1 + \lambda(x, y)} x_+ + \frac{1}{1 - \lambda(x, y)} x_- + y - y_0 \right|^2 = \frac{|x_+|^2}{|1 + \lambda(x, y)|^2} + \frac{|x_-|^2}{|1 - \lambda(x, y)|^2} + |y - y_0|^2$$

e  $h_3$  é contínua. Que  $h_3$  é de fato inversa local de  $h_2$  é uma simples verificação das igualdades  $h_2 \circ h_3 = id = h_3 \circ h_2$ . Para completar, vamos ver que  $dh_3(0) = I$  :

$$|h_3(x, y) - x - y|^2 = \left| \frac{x_+}{1 + \lambda} - x_+ \right|^2 + \left| \frac{x_-}{1 - \lambda} - x_- \right|^2 = \frac{\lambda^2}{(1 + \lambda)^2} |x_+|^2 + \frac{\lambda^2}{(1 - \lambda)^2} |x_-|^2$$

e a diferenciabilidade segue da continuidade de  $\lambda$  em 0 novamente. □

**Observação:** Analogamente ao que observamos no lema de Morse clássico, vemos que, se  $f \circ \varphi$  possuir outros pontos críticos em  $V$ , eles estarão em  $\mathbb{N}$  (no caso clássico concluíamos que os pontos críticos eram isolados).

No desenvolvimento da teoria de Morse, o papel fundamental do lema de Morse é possibilitar a demonstração do teorema 4.2.4 que por sua vez vai possibilitar a obtenção das desigualdades de Morse. Porém no nosso caso, i.e., para desenvolver a teoria de Morse através do lema para pontos críticos degenerados precisamos de um passo intermediário para redemonstrar o teorema 4.2.4 já que não sabemos nem que os pontos nem que os valores críticos são isolados. Vamos a eles.

Suponha que  $M$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tenham o mesmo grau de diferenciabilidade do lema de Morse 6.2.2, que  $f$  satisfaça a condição (C) e seja  $K$  o conjunto dos pontos críticos de  $f$ . Sejam  $a < b$  valores regulares de  $f$ , como  $f|_K$  é própria (proposição 4.4.2),  $f^{-1}([a, b]) \cap K$  é compacto. Então podemos cobrir os pontos críticos em  $f^{-1}([a, b])$  com finitas cartas  $(V_i, \varphi_i)_{i=1, \dots, r}$  correspondentes aos pontos críticos  $p_1, \dots, p_r$  de índices  $n_i$  onde  $f \circ \varphi_i$  é dada pelo lema de Morse 6.2.2 :  $f(\varphi_i(x, y)) = \frac{1}{2} \langle A_i x, x \rangle + f(g_i(y), y) = \frac{1}{2} \langle A_i x, x \rangle + h_i(y)$ . Suponha que  $A_1$  seja de Fredholm, considere vizinhanças de  $p_1$ ,  $U_1 \subset \overline{U_1} \subset W_1 \subset \overline{W_1} \subset V_1$  e perturbe  $h_1$  obtendo uma função  $\tilde{h}_1$  de modo que  $\tilde{f}_1(x, y) = \frac{1}{2} \langle A_1 x, x \rangle + \tilde{h}_1(y)$  satisfaça as seguintes propriedades

1.  $\tilde{f}_1$  coincide com  $f$  fora de  $W_i$ .
2.  $\tilde{f}_1$  é de Morse em  $W_1$  com seus (finitos) pontos críticos contidos em  $U_1$ .
3.  $M_a(f) = M_a(\tilde{f}_1)$  e  $M_b(f) = M_b(\tilde{f}_1)$

Repita o processo para os  $r$  pontos críticos originais. A função final  $f_r$  terá finitos pontos críticos em  $f^{-1}([a, b])$  com índices controlados pela dimensão de  $\mathbb{N}_i$ . A partir daqui recuperamos o teorema 4.2.4 com uma diferença : ao invés de sabermos a dimensão das alças que devemos colar, temos apenas cotas superiores para a dimensão. Mas isto é suficiente para obtermos estimativas da quantidade de pontos críticos em função dos números de Betti do par  $(M_b, M_a)$ .

**Observação:** O mesmo tipo de argumento é feito em [12] para funções com mais diferenciabilidade e com a hipótese desnecessária de serem os pontos críticos isolados. De fato, para os objetivos do artigo o caso interessante é o caso isolado.

### 6.3 Considerações Finais : O Teorema de Gromoll e Meyer

A demonstração da existência de infinitas geodésicas entre dois pontos de uma variedade riemanniana compacta (como no teorema 5.3.8), se estende imediatamente, como pergunta, à existência de infinitos extremos para problemas variacionais super regulares. No caso de problemas variacionais super regulares periódicos (como os estudados na seção 6.1) surgem algumas complicações. Considere um problema variacional do tipo

$$L = F + V$$

onde  $F$  é uma métrica de Finsler e  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$  é um “potencial”. Se  $V \equiv 0$  temos infinitos extremos de maneira trivial : as curvas constantes. Também, ainda com  $V \equiv 0$ , se tomarmos uma solução não trivial  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ , obtemos outra solução definindo  $\alpha^k(t) = \alpha(kt)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , ou ainda  $\alpha^\theta(t) = \alpha(t + \theta)$  que representam percorrer  $k$  vezes  $\alpha$  ou “rodar”  $\alpha$  de um ângulo  $\theta$ . Em [6] é desenvolvida a teoria de Lusternik-Schnirelman para eliminar problemas do 1º e 3º tipos. O 2º tipo é bem mais complicado e foi originalmente resolvido por Gromoll e Meyer usando uma teoria de Morse baseada no Lema de Morse para pontos críticos degenerados (a versão deles com mais diferenciabilidade disponível) e de uma teoria de Bott-Morse que considere funções com “variedades críticas” (pois o conjunto  $\{\alpha_\theta; \theta \in S^1\}$  é um círculo de pontos críticos em  $\Lambda(M)$  se  $\alpha$  for uma geodésica não trivial). O resultado (já enunciado para o caso de energia de Finsler) é o seguinte :

**Teorema 6.3.1.** Seja  $M^n$  uma variedade de Finsler compacta e simplesmente conexa. Se a cohomologia de  $M$  não for uma álgebra polinomial truncada em uma variável, então existem infinitas geodésicas periódicas para a métrica de Finsler (não triviais e geometricamente distintas).

**Observação:** Os detalhes da demonstração podem ser encontrados em [12, 13] para o caso riemanniano e em [10] para o de Finsler.

Se  $V$  for uma “boa” função (de Morse por exemplo), os problemas mencionados acima não aparecem. Num certo sentido o problema é mais simples! De fato vale a seguinte versão de um teorema provado em [7].

**Teorema 6.3.2.** Se  $M$  é uma variedade compacta simplesmente conexa e  $L = F + V$  é um problema variacional super regular então  $\tilde{L}$  admite infinitos extremais fechados ou pelo menos um extremal enrolante<sup>(5)</sup>.

Finalizamos o trabalho observando que o estudo da geometria finsleriana tem evoluido muito recentemente. As referências [25] a [30] são exemplos de artigos recentes sobre o assunto.

---

<sup>5</sup>Quando para um extremal  $\alpha$  existe uma sequência de inteiros  $k_i \rightarrow \infty$  tais que  $\alpha^{k_i}$  é ainda um extremal, dizemos que  $\alpha$  é um extremal enrolante (winding).

# Índice Remissivo

$\cup_f$ .....	30	compacto, operador .....	24	fibrado tangente .....	12
$\nabla f_x$ .....	16	equivalentes .....	28	Finsler	
$\nabla X$ .....	63	comprimento de uma curva ...	15	estrutura de .....	47
$\alpha^h$ .....	40	condição (C) .....	32, 50	métrica de .....	48
$\Lambda(M; x, y), \Lambda(M; x, y)_\alpha$ .....	38	conexão .....	62	variedade de .....	47
$\chi(X, Y)$ .....	45	riemanniana .....	63	fluxo .....	10
absolutamente contínua .....	35	curva(s) .....	13	forma bilinear (não) degenerada	5
ação integral .....	39	comprimento .....	15, 48	fórmula de Taylor .....	7
aditiva, função .....	45	integral .....	10, 13	fortemente diferenciável .....	8
admissível, par de espaços .....	45	maximal .....	13	Fredholm	
alça .....	30	levantamento canônico .....	13	função de .....	28
colagem de .....	30	tangentes .....	13	índice de .....	25
AR, ANR .....	55	D .....	36	índice para funções .....	28
atlas .....	11	derivada covariante .....	63	operador de .....	25
Banach, espaços de		desigualdades de Morse .....	46	função	
cálculo em .....	3	difeomorfismo .....	4, 17	absolutamente contínua .....	35
diferenciabilidade .....	3	diferenciabilidade .....	3	aditiva .....	45
integração .....	6	em uma variedade .....	12	$C^k$ .....	4, 12
bordo		forte .....	8	$C^{k-}$ .....	6, 12
de um meio espaço .....	6	Fréchet .....	3	de Morse .....	34
de uma variedade .....	11	Gateaux .....	4	escada .....	6
$C^k$ .....	4	dimensão de cobertura .....	56	implícita .....	9
$C^{k-}$ .....	6	equações diferenciais ordinárias	10	inversa .....	8
$C^r$ suave, espaço .....	22	espaço		localmente própria .....	28
campo de vetores .....	10	$C^r$ suave .....	22	positiva homogênea .....	68
em uma variedade .....	13	tangente .....	12	própria .....	28
característica de Euler .....	45	estrutura		regulada .....	6
carta .....	11	de Finsler .....	47	subaditiva .....	45
cartas compatíveis .....	11	diferenciável .....	11	funtor tangente .....	13
$\text{cat}(A, X), \text{cat}(X)$ .....	55	riemanniana .....	14	$G_\alpha$ .....	41
Christoffel, símbolo de .....	62	fibração .....	11	gradiente de funções reais .....	16
cobertura, dimensão de .....	56	fibra .....	11	pseudo-gradiente .....	49

grupo a um parâmetro .....	14	operador	subaditiva, função .....	45
$H_0(I, \mathbb{R}^n), H_1(I, \mathbb{R}^n)$ .....	35	compacto .....	submersão .....	16
$H_1(I, M), H_1(I, M)_\alpha$ .....	38	de Fredholm .....	subvariedade .....	17
hessiana .....	5, 17	$P, P_\alpha$ .....	$T_{x_0}M$ .....	12
homotopia, extensão de .....	56	partição da unidade .....	TM .....	12
imersão .....	16	pseudo-gradiente .....	Taylor, fórmula de .....	7
índice		Picard .....	tempo de escape .....	13
de Fredholm .....	25	ponto	Teorema	
de um ponto crítico .....	17	crítico .....	da contração de Banach .....	8
para forma bilinear simétrica	5	(não) degenerado .....	da função implícita .....	9
integração		índice .....	da função inversa .....	8
de funções escadas .....	6	regular .....	de Picard .....	10
de funções reguladas .....	6	positiva homogênea, função ...	de Sard .....	23
invertível $\sim$ operador compacto	28	problema variacional,	contra exemplo .....	23
$\tilde{L}(\alpha)$ .....	39	regular .....	de Sard-Smale .....	29
$L_k(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ .....	4	super regular .....	forma canônica p/ pts regulares	20
lema de Morse .....	18	própria, função .....	fundamental do cálculo .....	7
p/ pts críticos degenerados	72	$Q_\alpha$ .....	totalmente limitado .....	24
levantamento de uma curva ...	13	$R_k(X, Y)$ .....	transversalidade forte .....	21
localmente própria (função) ...	28	relativamente compacto .....	valor	
$M_a$ ou $M_a(f)$ .....	20	retração absoluta (AR) .....	crítico .....	17
meio espaço .....	6	riemanniana	regular .....	17
mergulho .....	17	métrica .....	variedade diferenciável .....	11
métrica		variedade .....	com bordo .....	11
finsleriana .....	48	completa .....	de Finsler .....	47
riemanniana .....	15	$S_k(X, Y)$ .....	completa .....	48
minimax .....	54	$S^E$ .....	regular .....	68
Morse		Sard .....	riemanniana .....	14
desigualdades de, .....	46	Sard-Smale .....	completa .....	15
função de, .....	34	separação, subespaço de .....	vizinhança de retração absoluta	55
lema de, .....	18	símbolo de Christoffel .....		
p/ pts críticos degenerados	72			

## Referências

- [1] Richard S. Palais. Morse theory on Hilbert manifolds. *Topology*, 2:299–340, 1963.
- [2] Richard S. Palais. Homotopy theory of infinite dimension manifolds. *Topology*, 5:1–16, 1966.
- [3] Richard S. Palais. Lusternik-Schnirelman theory on Banach manifolds. *Topology*, 5:115–132, 1966.
- [4] Richard S. Palais e Chuu lian Terng. *Critical points theory and submanifold geometry*. Lecture notes in Mathematics, 1353. Springer-Verlag, 1988.
- [5] Wilhelm Klingenberg. *Lectures on closed geodesics*, volume 230 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1978.
- [6] Francesco Mercuri. The critical points theory for the closed geodesics problem. *Mathematische Zeitschrift*, 156:231–245, 1977.
- [7] Francesco Mercuri. On the cohomology of the spaces of unparametrized closed curves. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei*, LXIII, 1977.
- [8] Francesco Mercuri e Giuliana Palmieri. Problems in extending Morse theory to Banach spaces. *Bollettino U.M.I.*, (4), 12:397–401, 1975.
- [9] Francesco Mercuri e Giuliana Palmieri. Morse theory with low differentiability. *Bollettino U.M.I.*, (7), 1-B:621–631, 1987.
- [10] Fausto M. de Souza. *Geodésicas fechadas em variedades de Finsler*. PhD thesis, IMECC-UNICAMP, 1997.
- [11] Fausto M. de Souza e Adriano A. de Moura. A Morse lemma for degenerate critical points with low differentiability. Preprint
- [12] Detlef Gromoll e Wolfgang Meyer. On differentiable functions with isolated critical points. *Topology*, 8 (4):361–370, 1969.
- [13] Detlef Gromoll e Wolfgang Meyer. Periodic geodesics on compact riemannian manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 3 (4):493–510, 1969.
- [14] John W. Milnor. *Morse theory*, volume 51 of *Annals of Mathematical Studies*. Princeton University Press, fifth edition, 1973.
- [15] A.B. Katok. Ergodic perturbations of degenerate integrable hamiltonnian systems. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.*, 37:539–576, 1973.
- [16] A.B. Katok. Ergodic perturbations of degenerate integrable hamiltonnian systems. *Math. USSR, Izvestija*, 7:535–571, 1973.
- [17] W. Ziller. Geometry of the Katok examples. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 3:135–157, 1982.
- [18] H.H. Matthias. Zwei verallgemeinerungen eines satzes von Gromoll-Meyer. *Bonner Mathematische Schriften*, 126, 1980.

- [19] Claudio Possani. Teoria de Morse em variedades de banach. Master's thesis, IME-USP, 1979.
- [20] Martin Schecchter. *Principles of functional analysis*. Academic Press, New York, second edition, 1973.
- [21] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*. Masson, Paris, second edition, 1983.
- [22] Frigyes Riez-Béla Sz.-Nagy. *Functional analysis*. Frederick Ungar Publishing Co., New York, fourth edition, 1965. Translated from Leçons d'analyse fonctionnelle by Leo F. Boron.
- [23] Jorge Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Projeto Euclides. SBM-CNPq, Rio de Janeiro, 1979.
- [24] James Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, Inc, Boston, 1966.
- [25] David Bao, Shiing-Shen Chern e Zhongmin Shen. Finsler geometry. *Contemporary Mathematics*, 196, 1996.
- [26] Shiing-Shen Chern. Finsler geometry is just riemannian geometry without the quadratic restriction. *Notices Amer. Math Soc.*, 43 (9):959–963, 1996.
- [27] Marco Abate e Giorgio Patrizio. Finsler metrics, a global approach. *Lecture Notes in Mathematics*, 1591, 1996.
- [28] N.K. Ribarska, Ts.Y. Tsachev e M.I. Krastanov. Deformation lemma on  $C^1$ -Finsler manifolds and applications. *C.R. Acad. Bulgare Sci.*, 47 (1):13–16, 1994.
- [29] N.K. Ribarska, Ts.Y. Tsachev e M.I. Krastanov. Deformation lemma, Lusternick-Schnirelman theory and mountain pass theorem on  $C^1$ -Finsler manifolds. *Serdica Math. J.*, 21 (3):239–266, 1995.
- [30] Patrick J. Rabier. Ehresman fibrations and Palais-Smale conditions for morphisms of Finsler manifolds. *Ann. of Math.(2)*, 146 (3):647–691, 1997.
- [31] Frank Warner. The conjugate locus of a riemannian manifold. *American Journal of Mathematics*, 87:575–604, 1965.